

תורת המשחקים - שיעור 9

משחקים בצורה רחבה

נפרדים ממשחקים בצורה אסטרטגית

▶ במשחקים בצורה אסטרטגית:

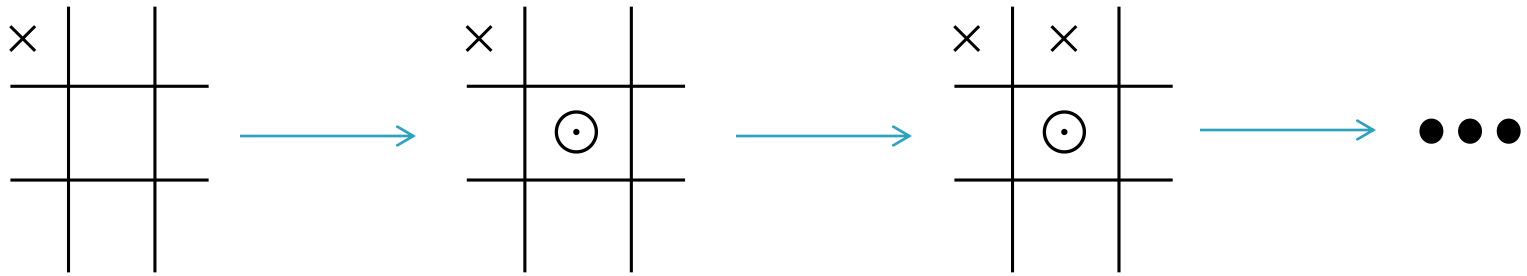
- השחקנים בוחרים אסטרטגיות במקביל ובצורה בלתי תלויה.
- מייד לאחר מכן מסתיים המשחק.

▶ נרצה לדון במשחקים מסוג אחר:

- השחקנים משחקים לפי תורות.
 - לכל שחקן יש מספר תורות.
 - האסטרטגיות ששחקן יכול לבחור משתנות מתור לתור.
 - יש כללים ברורים כיצד אמור להסתיים המשחק.
- ▶ למשחקים כנ"ל קוראים **משחקים בצורה רחבה**.

דוגמה: איקס-עיגול

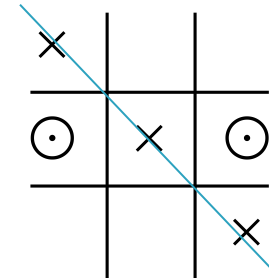
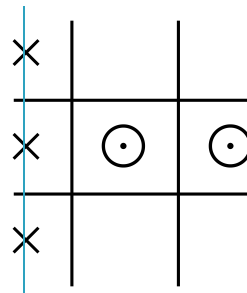
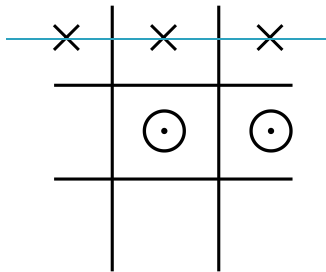
- ▶ ישנם שני שחקנים:
 - שחקן I הוא X
 - שחקן II הוא O
- ▶ השחקנים משחקים לפי תור כאשר שחקן I משחק ראשון.
- ▶ כל שחקן צריך לבחור משבצת ריקה על לוח משבצות 3×3 ולשים בו את הסימן שלו (X או O).



דוגמה: איקס-עיגול

▶ המשחק מסתיים כאשר:

- שחקן I משלים שורה או עמודה או אלכסון של X-ים - שחקן I מנצח.



- שחקן II משלים שורה או עמודה או אלכסון של O-ים - שחקן II מנצח.

- כל משבצות הלוח מלאות (ולא מתקיים אחד מהקודמים) - המשחק מסתיים בתיקו.

דוגמה: איקס-עיגול

- ▶ נשים לב שהאסטרטגיות העומדות בפני כל שחקן משתנות מתור לתור – בכל תור מספר המשבצות הפנויות שונה.
- ▶ ישנן 3 תוצאות אפשריות למשחק, שאפשר לתאר בעזרת פונקצית תועלת לכל שחקן.

$$u_I("× \text{ wins}") = 1 \quad u_{II}("× \text{ wins}") = -1$$

$$u_I("⊙ \text{ wins}") = -1 \quad u_{II}("⊙ \text{ wins}") = 1$$

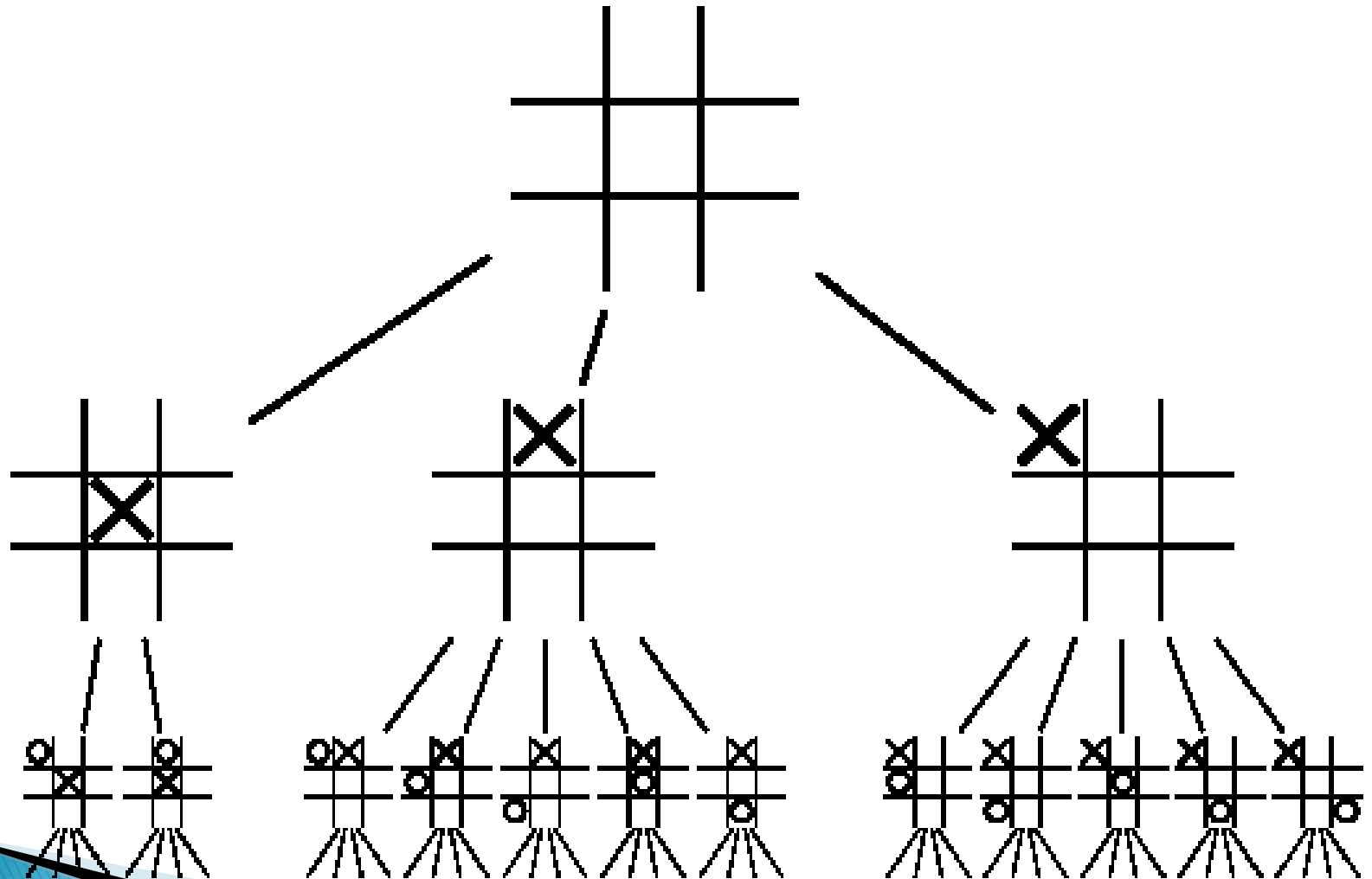
$$u_I("draw") = 0 \quad u_{II}("draw") = 0$$

- ▶ ניתן לזהות שבמושגים בהם דנו בשיעורים קודמים, מדובר **במשחק סכום אפס**.

דוגמה: איקס-עיגול

- ▶ הבעיה בפונקציות התועלת הנ"ל הוא שלא ניתן לנתח את המשחק לפיהן.
- ▶ אנחנו רוצים מושג מקביל ל**אסטרטגיות** שראינו במשחקים בצורה אסטרטגית.
- ▶ לשם כך נציג את **עץ המשחק**

דוגמה: איקס-עיגול



עץ המשחק

- ▶ כל **קדקד** בעץ מייצג מצב במשחק.
- ▶ לא רק את מצב הלוח, אלא את כל הצעדים שהובילו אל המצב.
- ▶ לכן יש כפילויות של מצבי הלוח בעץ.
- ▶ כל קדקד שייך לאחד השחקנים (כלומר קדקד שייך לשחקן אם כעת זהו תורו).
- ▶ כל **קשת** שיוצאת מקדקד אל אחד מבניו (כלפי מטה) מתארת **מהלך** של שחקן.
- ▶ ניתן לתאר סדרה של מהלכים ע"י סדרה של קדקדים

$$(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

עץ המשחק (המשך)

▶ כל עלה בעץ מייצג סיום של משחק. לדוגמה

x		
x	⊙	⊙
x		

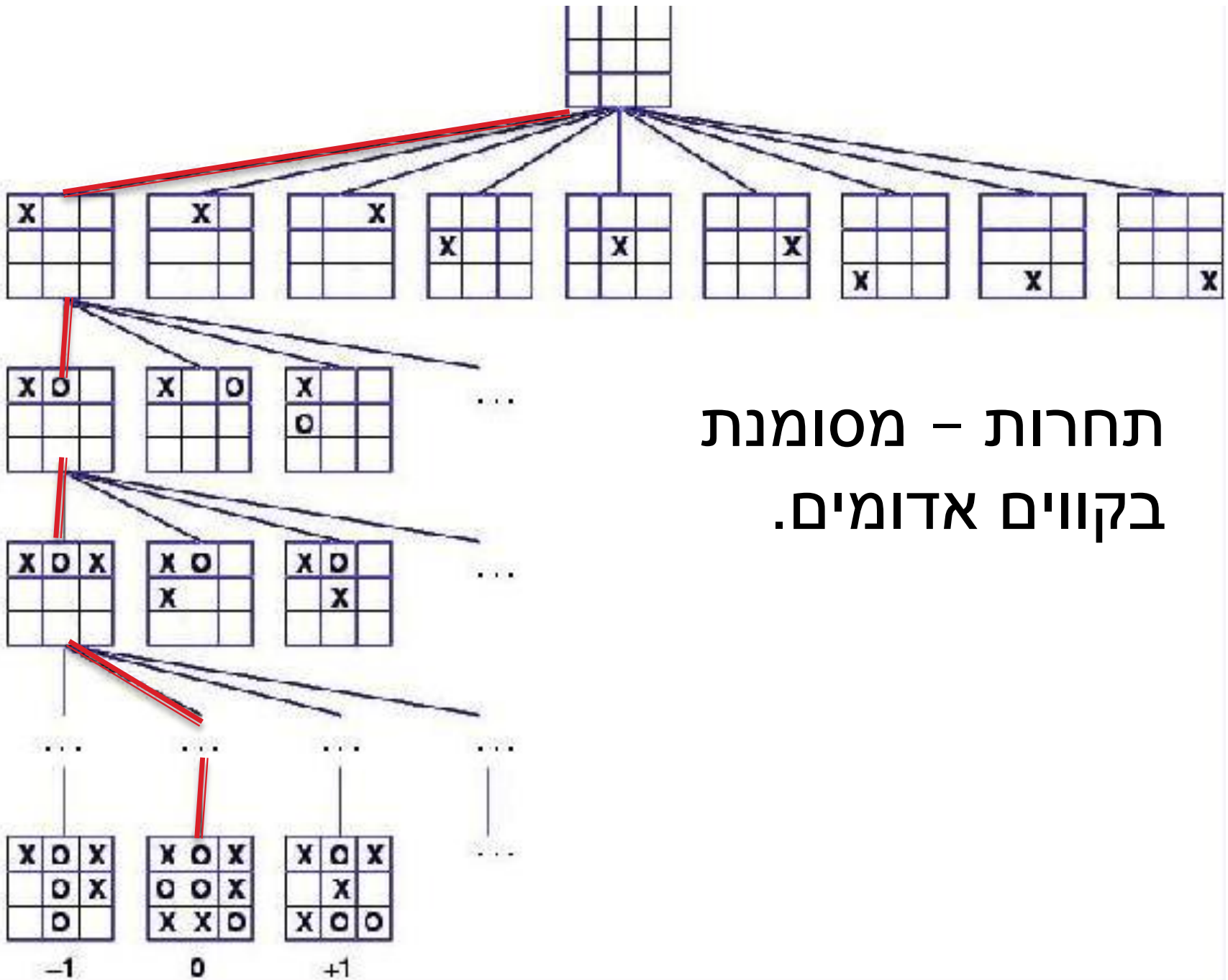
x	x	⊙
⊙	⊙	x
x	⊙	x

מייצגים עלים של עץ המשחק באיקס-עיגול (נזכיר שוב שיש כפילויות בגרף, ניתן להגיע לכל מצב של הלוח בכמה דרכים).

▶ סדרה "תקינה" של קדקדים

$$(x^0, x^1, \dots, x^n)$$

המתחילה בראש העץ ומסתיימת בעלה נקראת **תחרות** ומייצגת משחק שלם של שני שחקנים.

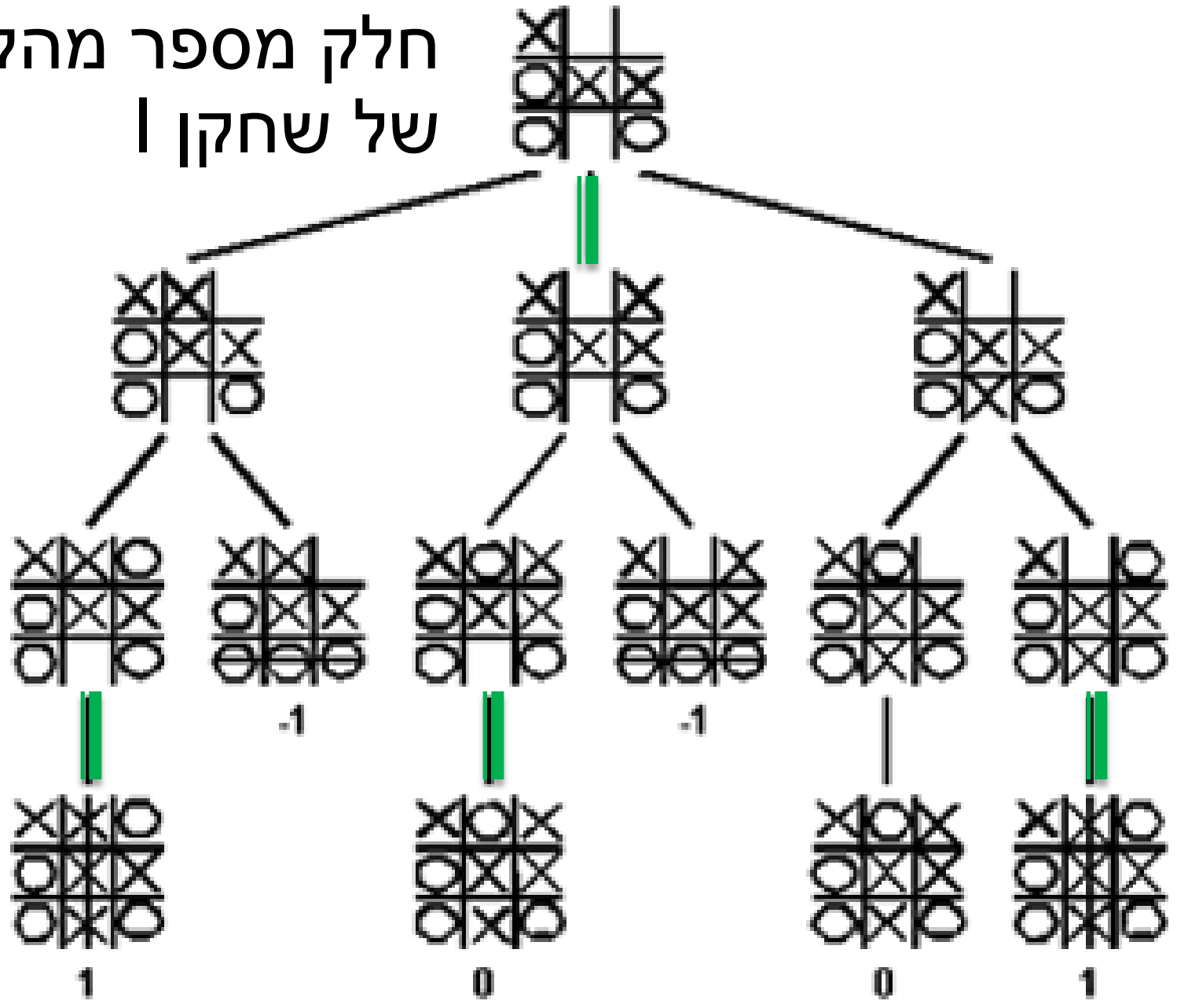


תחרות - מסומנת
 בקווים אדומים.

תכונות של עץ המשחק

- ▶ נשים לב: עץ המשחק של איקס-עיגול הוא **סופי**.
- ▶ בכל שלב במשחק, כל שחקן יודע בדיוק באיזה קדקד בעץ הוא נמצא, ואילו מהלכים הובילו אל מצב זה. תכונה זו של המשחק נקראת **ידיעה שלמה**.
- ▶ לפני המשחק, כל שחקן יכול לבנות לעצמו "ספר מהלכים", בו הוא מחליט מראש בכל קדקד (שלו) באיזה מהלך הוא בוחר.
- ▶ כך כל תגובה למהלך של השחקן השני מוגדרת מראש.

חלק מספר מהלכים של שחקן 1



אסטרטגיה במשחק בצורה רחבה

- ▶ ניתן לתאר את ספר המהלכים הנ"ל בעזרת פונקציה המתאימה לכל קדקד (השייך לשחקן) את אחד מבניו בעץ (עבור עלה הפונקציה תחזיר \emptyset).
- ▶ לפונקציה כנ"ל קוראים **אסטרטגיה** של שחקן i ומסמנים ב S_i .
- ▶ הפונקציה אוגרת מידע מיותר, כיוון שיש קדקדים שאף פעם לא נגיע אליהם (מדוע?)
- ▶ בהנתן אסטרטגיות s_I, s_{II} של שחקנים I, II בהתאמה, ניתן לדעת בדיוק איך יסתיים המשחק.

פונקציות התועלת במשחק בצורה רחבה

▶ אם כך ניתן להגדיר את הקלט של פונקציות התועלת ע"י האסטרטגיות של שני השחקנים.

▶ לדוגמה באיקס-עיגול נקבל עבור שחקן I:

$$u_I(s_I, s_{II}) = \begin{cases} 1 & \times \text{ wins} \\ -1 & \odot \text{ wins} \\ 0 & \text{draw} \end{cases}$$

דוגמה: איקס-עיגול

- ▶ ישנם 255,168 משחקים שונים אפשריים של איקס-עיגול. כלומר במושגים שלנו 255,168 תחרויות שונות.
 - 131,184 מסתיימים בניצחון של X
 - 77,904 מסתיימים בניצחון של O
 - 46,080 מסתיימים בתיקו
- ▶ הערה: אם נפטרים ממשחקים שמתקבלים ממשחקים אחרים ע"י סיבוב או שיקוף נשאר בסוף עם 26,830 משחקים שונים.
- ▶ לכאורה יש ייתרון במשחק איקס-עיגול לשחקן X.
- ▶ אך האם אכן כך?

דוגמה: איקס-עיגול (פתרון המשחק)

▶ למעשה כל שחקן באיקס-עיגול יכול להבטיח לעצמו לפחות תיקו.

▶ כלומר אם כל שחקן משחק במיטבו ולא עושה אף טעות, כל המשחקים בין השחקנים יסתיימו בתיקו!

▶ במילים אחרות, קיימת לשחקן I אסטרטגיה s_I כך שלכל אסטרטגיה s_{II} של שחקן II מתקיים

$$u_I(s_I, s_{II}) \in \{0, 1\}$$

▶ ולשחקן II קיימת אסטרטגיה s_{II} כך שלכל אסטרטגיה s_I של שחקן I מתקיים

$$u_{II}(s_I, s_{II}) \in \{0, 1\}$$

אסטרטגיות מנצחות ואסטרטגיות מבטיחות לפחות תיקו

- ▶ בעקרון, שחקן I היה מעוניין באסטרטגיה s_I כך שלכל אסטרטגיה s_{II} של שחקן II היה מתקיים

$$u_I(s_I, s_{II}) = 1$$

- ▶ לאסטרטגיה כזו קוראים אסטרטגיה מנצחת של שחקן I.
במשחק עיגול אין לאף שחקן **אסטרטגיה מנצחת**.

- ▶ לאסטרטגיה s_I של שחקן I עבודה לכל אסטרטגיה s_{II} של שחקן II מתקיים

$$u_I(s_I, s_{II}) \in \{0,1\}$$

- ▶ קוראים **אסטרטגיה מבטיחה לפחות תיקו** של שחקן I.

תרגום משחק בצורה רחבה למשחק בצורה אסטרטגית

- ▶ ברגע שהבנו מהן אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה, ניתן לבנות מטריצת משחק

	s_{II}^1	s_{II}^2	s_{II}^3	...
s_I^1	1	0	0	
s_I^2	1	-1	1	
s_I^3	0	1	0	
\vdots				

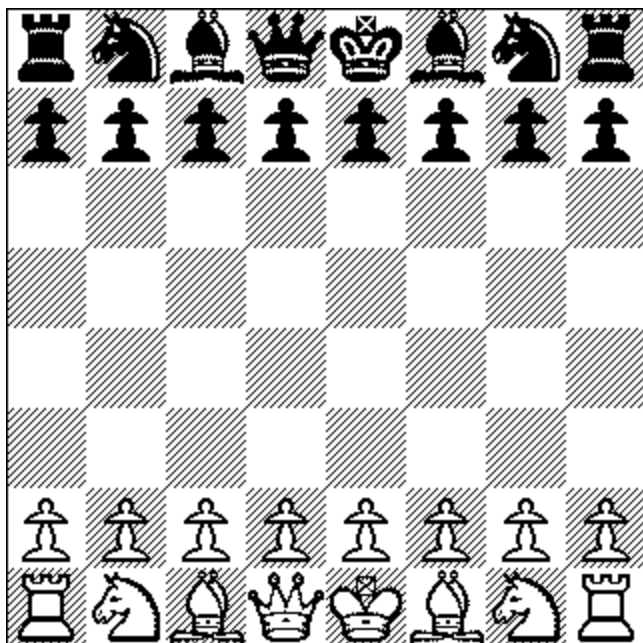
- ▶ מטריצה זו היא אמנם סופית, אך היא ענקית.
- ▶ אסטרטגיה של שחקן I היא מנצחת אם ורק אם....
- ▶ אסטרטגיה של שחקן II מנצחת אם ורק אם....

תתי-משחקים

- ▶ עבור כל מצב במשחק ניתן לשאול עבור שחקן האם קיימת לו אסטרטגיה מנצחת ממצב זה.
- ▶ לדוגמה באיקס-עיגול במצב הבא קיימת לשחקן X אסטרטגיה מנצחת, מהי?

×		
⊙		⊙
×		

- ▶ לכן יש חשיבות בהגדרת **תת-משחק**, בו לוקחים קדקד x בעץ, ואת כל **צאצאיו**, ומגדירים אותו כעץ המשחק.



דוגמה - שחמט

- ▶ המשחק מתנהל על לוח 8×8 .
- ▶ לכל שחקן יש 16 כלי משחק שמיקומם בתחילת המשחק קבוע.
- ▶ המשחק מתנהל בתורות, כאשר השחקן הלבן ראשון.
- ▶ לכל סוג של כלי יש מספר מהלכים חוקיים סופי.
- ▶ המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים הורג את המלך של השחקן השני (שח-מט), או כאשר השחקן שעכשיו תורו לא יכול לבצע מהלך, ומלכו אינו מאוים (תיקו) – ישנם עוד מצבים הגורמים לתיקו).

דוגמה - שחמט

- ▶ ניתן לייצג גם את משחק השחמט ע"י עץ משחק.
- ▶ ישנם בערך 10^{123} עלים לעץ המשחק של שחמט.
- ▶ העץ הוא עצום, ולכן אפילו בעזרת מחשב לא ניתן למפות את כל העץ ולבדוק את קיומן של אסטרטגיות מנצחות/מבטיחות תיקו.
- ▶ ישנם כללים במשחק השחמט המבטיחים שהעץ סופי.



משפט זרמלו (1913)

- ▶ במשחק השחמט נכונה אחת ורק אחת מהטענות הבאות:
 - ללבן יש אסטרטגיה מנצחת
 - לשחור יש אסטרטגיה מנצחת
 - לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.
- ▶ שימו לב שהמשפט אינו אומר את הדבר הברור שכל משחק מסתיים בנצחון, תיקו או הפסד.
- ▶ למעשה הסיבה היחידה שמשחק שחמט מעניין היא שעדיין לא ניתן לחשב את כל עץ המשחק ולבדוק אילו מהאפשרויות היא הנכונה.

משפט פון-נוימן (???)

- ▶ בכל משחק בצורה רחבה עם: שני שחקנים, עץ משחק סופי, ידיעה שלמה, וקבוצת התוצאות היא $\{I, II\}$ מנצח, $\{I, II\}$ מנצח, תיקו} מתקיימת אחת ורק אחת משלוש האפשרויות הבאות:
 - לשחקן I יש אסטרטגיה מנצחת
 - לשחקן II יש אסטרטגיה מנצחת
 - לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.
- ▶ המשפט אינו נכון עבור עצי משחק אינסופיים.

הערה: למעשה כנראה שזרמלו כבר הוכיח טענה זו ב 1913, ואילו פון-נוימן ומורגנסטרן הוכיחו את המשפט ב 1944 בעזרת **אינדוקציה לאחור**, שהיא השיטה בה נתמקד בקורס (ראה (Schwalbe & Walker 2001).

הוכחת משפט זרמלו/פון-נוימן

- ▶ מוכיחים את המשפט עבור משחק נתון אחד, ומשפחת כל תתי-המשחקים שלו. נסמן משפחה זו ב F .
- ▶ ההוכחה היא באינדוקציה על מספר הקדקדים בעץ $\Gamma \in F$.
- ▶ אם מספר הקדקדים בעץ Γ הוא 1, אזי העץ הוא אחד העלים במשחק.
- ▶ בוודאי שהמשפט נכון עבור עלה, כיוון שעלה מייצג סיום משחק:
 - אם שחקן I ניצח, אז יש לשחקן I "אסטרטגיה מנצחת" בעלה.
 - אם שחקן II ניצח, אז יש לשחקן II "אסטרטגיה מנצחת".
 - אם המשחק הסתיים בתיקו, אז לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה שמבטיחה לו לפחות תיקו.

המשך הוכחה

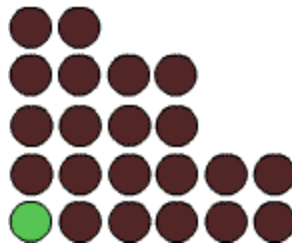
- ▶ נניח שהטענה נכונה עבור כל תת-משחק עם לכל היותר $n - 1$ קדקדים, ונוכיח את הטענה עבור תת-משחק עם n קדקדים.
- ▶ נניח בלי הגבלת כלליות שהתת-משחק מתחיל בתור של שחקן A .
- ▶ לפי הנחת האינדוקציה לכל מהתת-משחקים שמתחילים באחד מבניו של הקדקד הראשי מתקיים המשפט.
- ▶ אם קיים בן של הקדקד הראשי בו לשחקן A יש אסטרטגיה מנצחת, אזי קיימת לשחקן A אסטרטגיה מנצחת.
- ▶ אם בכל בניו של הקדקד הראשי יש לשחקן B אסטרטגיה מנצחת, אזי לשחקן B יש אסטרטגיה מנצחת.

המשך הוכחה

- ▶ אחרת: בכל אחד מהבנים של הקדקד הראשי יש לשחקן II אסטרטגיה מנצחת או קיימת לשני השחקנים אסטרטגיה מבטיחה תיקו.
- ▶ בנוסף בהכרח קיים בן בו לשני השחקנים אסטרטגיה מבטיחה תיקו.
- ▶ לכן גם מהקדקד הראשי קיימת אסטרטגיה מבטיחה תיקו לשני השחקנים.
- ▶ מש"ל

דוגמה - משחק צ'ומפ (chomp)

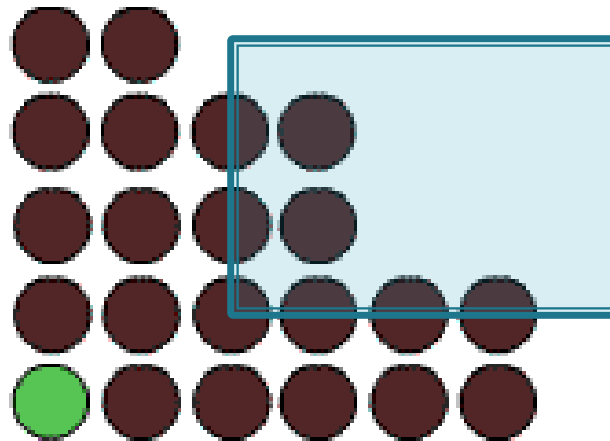
▶ המשחק הומצא ע"י Frederik Schuh ב 1943 או ע"י David Gale ב 1974.



- ▶ מסדרים עוגיות בצורה מלבנית הדומה לנ"ל, כאשר העוגיה השמאלית התחתונה מורעלת.
- ▶ כל שחקן בוחר עוגיה בתורו, ואז הוא אוכל/מקבל את כל העוגיות שמעל ומימין לעוגיה שלו.

דוגמה - משחק צ'ומפ (chomp)

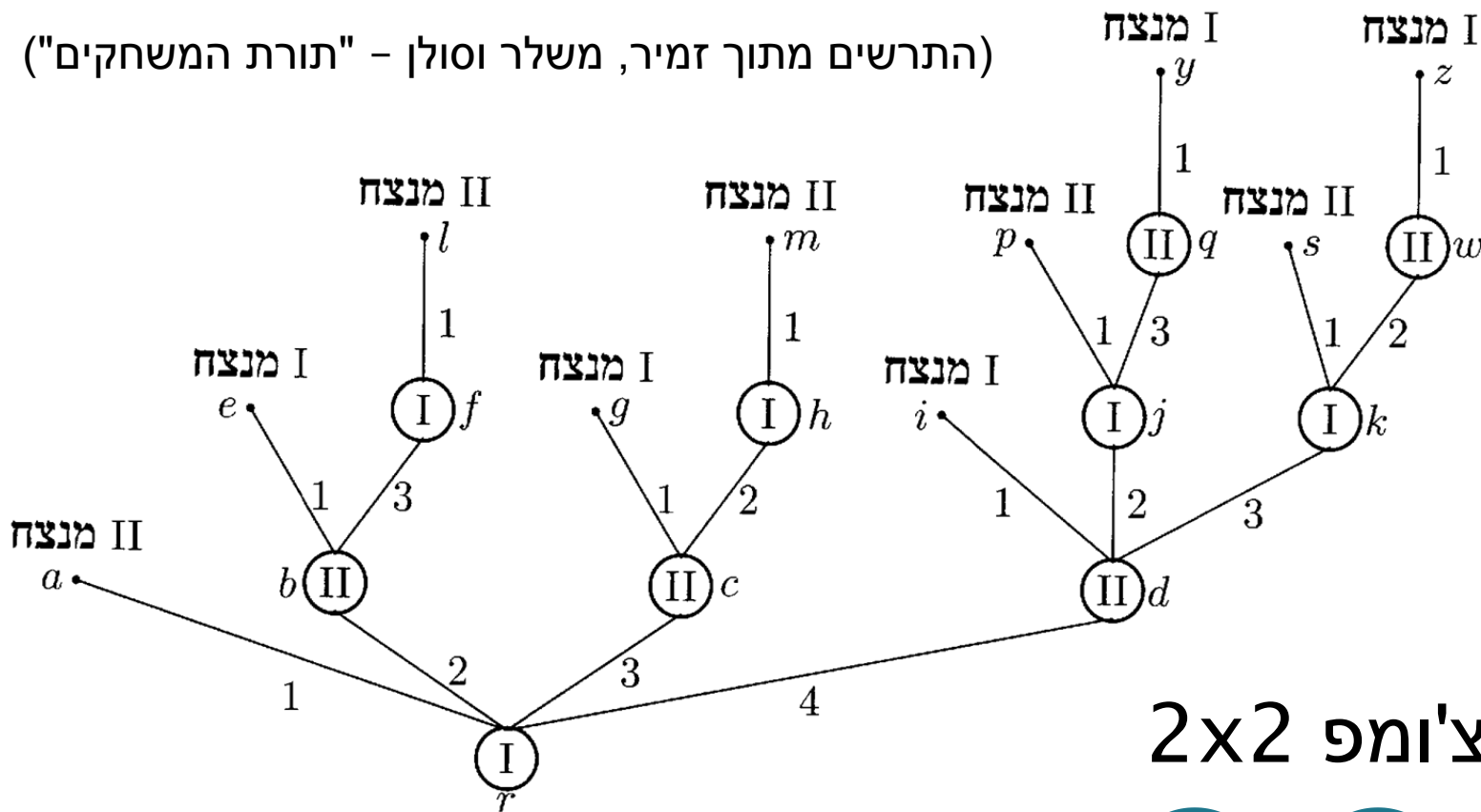
▶ כלומר אם שחקן 1 בחר בעוגיה במיקום $(2, 3)$ אז:



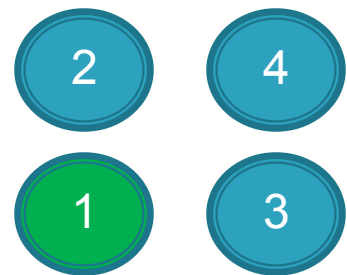
▶ מפסיד השחקן שאוכל את העוגיה המורעלת.

דוגמה - משחק צ'ומפ (chomp)

(התרשים מתוך זמיר, משלר וסולן - "תורת המשחקים")



משחק צ'ומפ 2x2



צ'ומפ ריבועי

- ▶ **משפט:** במשחק צ'ומפ חאח לשחקן i יש אסטרטגיה מנצחת.
- ▶ **הוכחה:**
- ▶ שחקן i בוחר בעוגיה $(2, 2)$.
- ▶ כעת שחקן i יכול לבחור רק בעוגיה $(i, 1)$ או $(1, i)$.
- ▶ אם שחקן i בוחר בעוגיה $(i, 1)$ אז שחקן i ייבחר בעוגיה $(1, i)$, ולהיפך.
- ▶ באופן זה יאכלו העוגיות עד שתשאר רק עוגיה $(1, 1)$ לשחקן i .

צ'ומפ מלבני

- ▶ **משפט:** עבור כל לוח צ'ומפ $m \times n$ (כאשר $n > 1$ או $m > 1$) יש לשחקן א אסטרטגיה מנצחת.
- ▶ **הוכחה:** לפי משפט זרמלו/פון-נוימן לאחד השחקנים יש אסטרטגיה מנצחת.
- ▶ נניח בשלילה שלשחקן א יש אסטרטגיה מנצחת s_{II} .
- ▶ האסטרטגיה של שחקן א אומרת שאם שחקן א אוכל את עוגיה (m, n) אז שחקן א צריך לאכול את עוגיה (i, j) .
- ▶ אם כך שחקן א יכול לאכול מלכתחילה את עוגיה (i, j) , ומעתה לשחק לפי האסטרטגיה של שחקן א, ולנצח את המשחק. כלומר גם לשחקן א יש אסטרטגיה מנצחת.
- ▶ סתירה, מש"ל.
- ▶ **מה שמדהים במשפט הוא שאיננו יודעים מההוכחה מהי האסטרטגיה המנצחת!!!**