אנליזה מתקדמת למורים - תרגול 3

9 בנובמבר 2020

1 משפט דה-מואבר

משפט: עבור $z = r_1\text{cis}\theta_1, w = r_2\text{cis}\theta_2$ מתקיים: $zw = (r_1r_2)\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

לדוגמא:

1. $(5\text{cis}\frac{\pi}{4}) \cdot (3\text{cis}\frac{3\pi}{7}) = 15\text{cis}(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{7} = \frac{19\pi}{28}) = 15\cos\frac{19\pi}{28} + 15\sin\frac{19\pi}{28}i$

2. $= (3\text{cis}\frac{3\pi}{7}) + (5\text{cis}\frac{\pi}{4})$. כדי לחבר עוברים להצגה הקרטזית:

$$(5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i) + (3 \cdot 0.222 + 3 \cdot 0.975i) = 4.2 + 6.46i$$

2 מסקנה - חישוב שורשים

ממשפט דה-מואבר נקבל עבור $z = r\text{cis}\theta$ מתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = (r\text{cis}\theta)^n = r^n\text{cis}(n\theta)$$

$$z^{-n} = (z^n)^{-1} = \frac{1}{r^n}\text{cis}(-n\theta)$$

לדוגמא:

$$(\sqrt{2}\text{cis}\frac{2\pi}{3})^3 = 2\sqrt{2}\text{cis}2\pi = 2\sqrt{2}$$

מכאן נעבור למציאת שורשים מסדר גבוה של מספר מסויים. נמצא כעת, את כל השורשים השלישיים של $2\sqrt{2}$. כלומר, נפתור את המשוואה:

$$z^3 = 2\sqrt{2}$$

נסמן $z = r\text{cis}\theta$ ונקבל:

$$(r\text{cis}\theta)^3 = 2\sqrt{2}\text{cis}(0 + 2\pi k)$$

$$r^3\text{cis}3\theta = 2\sqrt{2}\text{cis}(0 + 2\pi k)$$

יש שיוויון אמ"ם יש שיוויון ברדיוסים ובזויות. לכן נקבל:

$$\begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \\ 3\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

נשים לב, שנקבל תשובות שונות עבור $k = 0, 1, 2$ ולכל $k \geq 3$ נקבל תוצאה שכבר מצאנו:

$$z_0 = \sqrt{2}\text{cis}0$$

$$z_1 = \sqrt{2}\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\text{cis}\frac{4\pi}{3} = \sqrt{2}\text{cis}(-\frac{2\pi}{3}) = \overline{z_1}$$

$$z_3 = \sqrt{2}\text{cis}2\pi = z_0$$

הערה: משפט שתוכיחו בהרצאה: אם $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ פולינום מעל $\mathbb{R}$ (כלומר, $a_i \in \mathbb{R}$) אז $p(w) = 0 \Rightarrow p(\overline{w}) = 0$. כאן אצלנו הפולינום הוא $p(z) = -2\sqrt{2} + z^3$ המקדמים הם $a_0 = -2\sqrt{2}, a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1$. רואים שכולם ממשיים, ולכן המשפט מתקיים.

באופן כללי: פתרון המשוואה $z^n = r\text{cis}\theta$ הוא:

$$\forall 0 \leq k \leq n-1 : z_k = r^{\frac{1}{n}}\text{cis}(\frac{\theta + 2\pi k}{n})$$

תרגילים:

1. פתרו $z^5 = 8\text{cis}\frac{\pi}{4}$

   פתרון:

$$z_k = 8^{\frac{1}{5}}\text{cis}(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5})$$

$$z_0 = 8^{\frac{1}{5}}\text{cis}\frac{\pi}{20}$$

$$z_1 = 8^{\frac{1}{5}}\text{cis}\frac{9\pi}{20}$$

$$z_2 = 8^{\frac{1}{5}}\text{cis}\frac{17\pi}{20}$$

$$z_3 = 8^{\frac{1}{5}}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$$

$$z_4 = 8^{\frac{1}{5}}\text{cis}\frac{33\pi}{20}$$

שימו לב שפולינום זה איננו מעל $\mathbb{R}$ כי הוא בעצם מהצורה $p(z) = \underbrace{-8\text{cis}\frac{\pi}{4}}_{a_0 \notin \mathbb{R}} + \underbrace{1}_{a_5} z^5$

וכיון ש־ $Im(-8\text{cis}\frac{\pi}{4}) \neq 0$ אז המשפט שכתבנו בהערה לא מדבר בפולינום כזה. (בדומה, כאשר אנחנו פותרים את המשוואה $x^2 = 1$ אנחנו בעצם מחפשים שורש לפולינום $q(x) = -1 + x^2$).

3 שורשי היחידה

שורשי היחידה מסדר n הם אוסף הפתרונות של המשוואה

$$z^n = 1$$

כפי שראינו יש n מספרים מרוכבים הפותרים את המשוואה הזו, והם:

$$\forall 0 \leq k \leq n-1 : z_k = 1\text{cis}\frac{0 + 2\pi k}{n} = \text{cis}\frac{2\pi k}{n}$$

למשל, שורשי היחידה מסדר 3 הם פתרונות המשוואה $z^3 = 1$ והם:

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = \text{cis}\frac{4\pi}{3}$$

תרגילים:

1. נתון $z = r\text{cis}\theta$ הנמצא מחוץ למעגל היחידה. חשבו עבור המספרים הבאים האם הם: מחוץ/בתוך/על מעגל היחידה:

(א) $\overline{z}$.

פתרון: $\overline{z} = r\text{cis}(-\theta)$ וכיון ש־$r > 1$ נקבל שהוא מחוץ למעגל.

(ב) $-\frac{1}{z}$

פתרון: פחות חשובה לנו הזוית כרגע, העיקר הוא שהרדיוס הוא $\frac{1}{r} < 1$ ולכן נמצא בתוך מעגל היחידה.

(ג) $\frac{z}{\overline{z}}$

פתרון: $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{r\text{cis}\theta}{r\text{cis}-\theta} = 1\text{cis}2\theta$. קיבלנו מס' עם רדיוס 1, ולכן על מעגל היחידה.

(ד) $z \cdot \overline{z}$

פתרון: $z \cdot \overline{z} = (r\text{cis}\theta)(r\text{cis} - \theta) = r^2\text{cis}0 = r^2$ לא פלא, כי ראינו בעבר $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = r^2$. וכמובן אם $r > 1$ אז גם $r^2 > 1$. ולכן נמצא מחוץ למעגל היחידה.

2. מצאו שלושה שורשי יחידה שונים מסדר 11 שמכפלתם 1

פתרון: שורשי היחידה מסדר 11 הם פתרונות המשוואה $z^{11} = 1$, והם:

$$z_k = \text{cis}\frac{2\pi k}{11}$$

ואנחנו רוצים למצוא a, b, c כך ש־

$$\left(\text{cis}\frac{2\pi a}{11}\right)\left(\text{cis}\frac{2\pi b}{11}\right)\left(\text{cis}\frac{2\pi c}{11}\right) = 1$$

לפי דה־מואבר: נרצה:

$$\text{cis}\frac{2\pi(a+b+c)}{11} = 1$$

לכן נרצה $a+b+c$ יהיה כפולה של 11. למשל נוכל לקחת $a = 10, b = 9, c = 3$.