תרגיל תיאורטי 4

22 בינואר 2017

1. יהיו $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. נרצה לפתור את המערכת $Ax = b$ אך למזלנו למערכת זאת אין פתרון (אתם מוזמנים לבדוק...). אז מה כן? נרצה למצוא פתרון מקורב b'. מה זה אומר? נרצה למצוא $b' \in \mathbb{R}^4$ כך ש

   (א) למערכת $Ax = b'$ יש פתרון.

   (ב) הסטיה $b - b'$ מינימאלית כלומר ש $\|b - b'\|$ מינימאלי (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על $\mathbb{R}^4$)

   מצאו b' כנדרש וחשבו את הסטיה $\|b - b'\|$.
   הדרכה: מצאו תחילה בסיס או"ג ל $C(A)$ והשתמשו בו על מנת להטיל את b על $C(A)$.

2. יהא V ממ"פ (עם מ"פ $\langle v_1, v_2 \rangle$ונורמה מורשית $\|v\|$) ויהא $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס או"נ הוכיחו כי

   (א) לכל $v \in V$ מתקיים כי $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$.

   (ב) לכל צירוף לינארי $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ של איברי Bמתקיים $\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$

3. חשבו את הדטרמיננטטנה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

.4

(א) יהא $\mathbb{R}^n$ ממ"פ עם המכפלה הסקלארית. הוכיחו כי לכל $v, w \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^t w\rangle$

(ב) תהא $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה המקיימת $Q^tQ = I$ (כלומר מטריצה או"ג) ויהא λ ע"ע שלה. הוכיחו כי $\lambda \in \{\pm 1\}$.
הדרכה: הוכיחו כי מתקיים לכל v כי $\langle Qv, Qv\rangle = \langle v, v\rangle$

.5 יהיו $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים. נגדיר מטריצת ונדרמונט להיות

$$V(a_0, \ldots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

למשל

$$V(3,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי

$$|V(a_0, \ldots a_{n-1})| = \prod_{0\le i<j\le n-1} (a_j - a_i)$$

למשל

$$|V(3,2,4)| = (4-2)(4-3)(2-3)$$

הדרכה: בצעו את פעולות העמודה האלמנטריות הבאות לפי הסדר הבא

- $C_n - a_0 C_{n-1} \to C_n$
- $C_{n-1} - a_0 C_{n-2} \to C_{n-1}$
- עד $C_2 - a_0 C_1 \to C_2$
- השתמשו ברקורסיה/אינדוקציה על מנת להגיע לפתרון.

כאשר C_i זה עמודה i של המטריצה (שימו לב שפעולות אלו לא משנות את הדטרמיננטה)

(ב) הוכיחו כי $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים שונים אמ"מ המטריצה $V(a_0, \ldots a_{n-1})$ הפיכה.

6. תהא $A\in\mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I)=5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

7. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

8.

(א) תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ כך שכל שורה של A מסתכמת לאותו מספר שנסמנו λ.
הוכיחו כי λ ע"ע של A.
למשל למטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ יש ערך עצמי 6 כי כל שורה מסתכמת ל 6.
רמז: חישבו מי הו"ע המתאים.

(ב) תהא $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ מצא מטריצה P או"ג ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$

9. תזכורת: סדרת פיבונאצי $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ היא הסדרה המוגדרת בצורה רקורסיבית כך:

$$F_0=0, F_1=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

מצא נוסחה מפורשת ל F_n
הדרכה:

(א) שימו לב כי מתקיים לכל n

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו A כך שייתקיים

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

לכל nטבעי.

(ג) ע"י לכסון A חשבו מפורשות את A^n (אם $A=PDP^{-1}$ אזי ... $A^n=$)

(ד) הסיקו את F_n