תרגיל 4- פתרון

שאלה 1

(1) יהי (X,τ) מ"ט.

הוכיחו כי אם $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי f פונקציה בורלית.

הוכחה:

f רציפה ולכן לכל $c\in\mathbb{R}$ $[f<c]\in\tau$ כתמונה

הפוכה של כדור פתוח. בנוסף: $\tau\subset\mathbb{B}(\tau)$.

לכן לכל $c\in\mathbb{R}$ $[f<c]$ מדידה בורל, ולכן f בורלית.

(2) יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד, כאשר $\mathcal{A}=\mathbb{P}(X)$.

אילו מהפונקציות $f:X\to\mathbb{R}$ מדידות $\mathcal{A}$- ?

פתרון: תהי f ממשית על X.

אזי: לכל $c\in\mathbb{R}$ $[f<c]\subseteq X$, ולכן $[f<c]\in\mathcal{A}$.

לכן f מדידה - $\mathcal{A}$.

מכיוון שהבחירה של f היתה שרירותית, קבלנו ש כל פונקציה

ממשית על X מדידה - $\mathcal{A}$.

2. יהי מרחב מדיד (X,S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1,f_2 ו f_3 ($f_i:X\to\mathbb{R}$ ($(i=1,2,3)$). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2+f_2(x)t+f_3(x)=0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x\in X$.

הראו כי $A\equiv\{x\in X: \textit{the equation has two distinct roots}\}$ הינה מדידה S .

פתרון: נשים לב כי $A=\{x\in X: f_2^2-4f_1f_3>0\}$. ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל וחיבור ולכן $f_2^2-4f_1f$ הינה פונקציה מדידה S ומכאן ש $f_2^2-4f_1f>0$ הינה קבוצה מדידה S .

3. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה S .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha<0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}((-\infty,\alpha))=\{x\in X\mid \frac{f(x)}{g(x)}<\alpha\}$$
$$=\{x\in X\mid f(x)<g(x)\alpha\}\cap\{g(x)>0\}\cup\{x\in X\mid f(x)>g(x)\alpha\}\cap\{g(x)<0\}$$
$$=\{x\in X\mid f(x)-g(x)\alpha<0\}\cap\{g(x)>0\}\cup\{x\in X\mid f(x)-g(x)\alpha>0\}\cap\{g(x)<0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f-\alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.

4. הוכיחו או הפריכו:
   1. אם $|f|$ מדיה אז f מדידה.
   2. אם f^3 מדידה אז f מדידה.

פתרון:

1. הטענה לא נכונה. נוכיח זאת באמצעות דוגמא נגדית.

נראה דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

ניקח את $f=1_E-1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס.

ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}(1)=E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $|f|=1$

זו כמובן פונקצית אינדיקטור שניתן לרשום $f=1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

2. אכן. נוכיח:

f^3 מדידה ולכן לכל $c\in\mathbb{R}$ $[f^3<c^3]\in S$,

כלומר: $[f<c]\in S$, וזאת לכל $c\in\mathbb{R}$.

לכן f מדידה.

שאלה 5

יהיו A, A_n קבוצות מדידות לבג, נתון כי $\rho(A_n, A) \to 0$

האם נכון כי: (1) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{a.e.} \mathbb{1}_A$?

(2) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{m} \mathbb{1}_A$?

פתרון:

(1) לא. דוגמא נגדית: נגדיר את סדרת הקבוצות הבאה:

לכל n ולכל $1 \le k \le n$: $A_{nk} := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$

אזי $\rho(A_{nk}, \emptyset) = m(A_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

אולם, לכל $x \in [0,1]$: $x \in \limsup A_{nk}$

ולכן $\mathbb{1}_{A_{nk}} \not\to \mathbb{1}_\emptyset$ בשום מקום.

(2) אכן. נוכיח:

נתון: $\rho(A_n, A) \to 0$

כלומר: $\lim_{n\to\infty} m\left((A_n \cap A^c) \cup (A \cap A_n^c)\right) = 0$

ומכאן שלכל $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\left[\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{A\cap A_n} + \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_n\cap A} > \varepsilon\right]\right) = 0$$

$$\parallel$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\left[|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_A| > \varepsilon\right]\right) = 0$$

כלומר $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{m} \mathbb{1}_A$.