תרגיל 12 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. חשבו $\iiint\limits_G zdV$ כאשר $G=\{(x,y,z):9\le x^2+y^2+z^2\le 25, z\ge 0\}$.

פתרון: נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi \\ y=r\cos\theta\sin\varphi \\ z=r\sin\theta \end{cases}$$

תחומים:

$$3\le r\le 5$$
$$0\le\varphi\le 2\pi$$
$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

יעקוביאן:

$$J=r^2\cos\theta$$

לכן:

$$\iiint\limits_G zdV=\int_3^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\cdot r^2\cos\theta d\theta d\varphi dr=\int_3^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi dr=\left[\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]$$

$$=\int_3^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{2}\sin 2\theta d\theta d\varphi dr=\int_3^5\int_0^{2\pi}\left[-\frac{r^3}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi dr=\int_3^5\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{4}+\frac{r^3}{4}\right)d\varphi dr=\int_3^5 2\pi\left(\frac{r^3}{2}\right)dr=\int_3^5\pi r^3dr$$

$$=\left[\pi\frac{r^4}{4}\right]_3^5=\pi\left(\frac{5^4}{4}-\frac{3^4}{4}\right)=136\pi$$

2. חשבו $\iiint\limits_G xdV$ כאשר $G=\{(x,y,z):(x-2)^2+(y+3)^2+\frac{(5z-10)^2}{4}\le 16\}$.

פתרון: התחום המתואר הוא:

$$(x-2)^2+(y+3)^2+\left(\frac{5z-10}{2}\right)^2\le 16$$

נשתמש בהחלפת המשתנים, $\begin{cases} u=x-2 \\ v=y+3 \\ w=\frac{5z-10}{2} \end{cases}$.

נמצא את x,y,z כפונקציות של u,v,w (באמצעות בידוד של x,y,z מהמשוואות הקודמות).

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 3 \\ z = \dfrac{2w+10}{5} \end{cases}$$

בקואורדינטות u,v,w התחום המתואר הוא $u^2 + v^2 + w^2 \le 16$.

היעקוביאן של החלפת המשתנים הוא: $J_F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$ וערכו המוחלט: $\frac{2}{5}$.

לכן,

$$\iiint_G x\,dV = \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 16} \frac{2}{5}(u+2)\,du\,dv\,dw$$

ע"י מעבר לקואורדינטות כדוריות:

$$\begin{cases} u = r\cos\theta\cos\varphi \\ v = r\cos\theta\sin\varphi \\ w = r\sin\theta \end{cases}$$

התחום המתואר הוא:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

יעקוביאן:

$$J = r^2\cos\theta$$

לכן:

$$\iiint_G xdV = \frac{2}{5}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 16}(u+2)dudvdw = \frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta\cos\varphi+2)\cdot r^2\cos\theta d\theta d\varphi dr =$$

$$\frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos^2\theta\cos\varphi d\theta d\varphi dr + \frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2\cos\theta d\theta d\varphi dr = \begin{bmatrix}\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1\\ \cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^3(\cos 2\theta+1)\cos\varphi d\theta d\varphi dr + \frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\left[2r^2\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr =$$

$$\frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}r^3\cos 2\theta\cos\varphi + \frac{1}{2}r^3\cos\varphi)d\theta d\varphi dr + \frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}(2r^2+2r^2)d\varphi dr =$$

$$\frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}r^3\sin 2\theta\cos\varphi + \theta\frac{1}{2}r^3\cos\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr + \frac{2}{5}\int_0^4 2\pi(4r^2)dr =$$

$$\frac{2}{5}\int_0^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}r^3\cos\varphi\right)d\varphi dr + \frac{2}{5}\int_0^4 2\pi(4r^2)dr =$$

$$\frac{2}{5}\int_0^4\left[\frac{\pi}{2}r^3\sin\varphi\right]_0^{2\pi} dr + \frac{2}{5}\left[\frac{8\pi r^3}{3}\right]_0^4 = \frac{2}{5}\int_0^4 0dr + \frac{2}{5}\left(170\frac{2}{3}\pi\right) = 68\frac{4}{15}\pi$$

3.

(ממועד ב' של שנה שעברה) חשבו את האינטגרל המשולש $\iiint_A xdxdydz$ כאשר A הוא פנים הפירמידה הנמצאת בין מישורי הצירים למישור $x+y+z=1$.

פתרון:

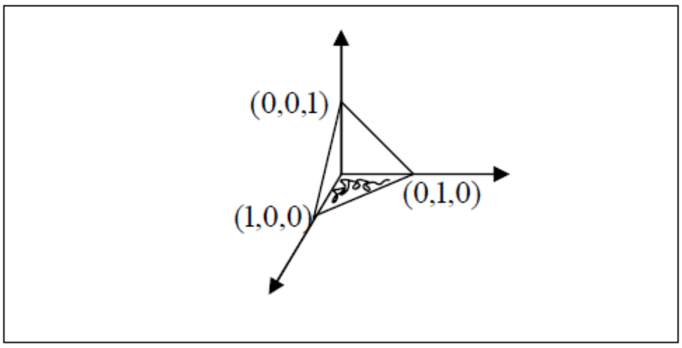
נמצא את חיתוכי המישור עם הצירים:

עם ציר ה x: $(1,0,0)$ $\quad \begin{cases}x+y+z=1\\ y=z=0\end{cases} \Rightarrow x=1$

עם ציר ה y: $(0,1,0)$ $\quad \begin{cases}x+y+z=1\\ x=z=0\end{cases} \Rightarrow y=1$

עם ציר ה z: $(0,0,1)$ $\quad \begin{cases}x+y+z=1\\ x=y=0\end{cases} \Rightarrow z=1$

לכן הגוף הוא פנים הפירמידה:

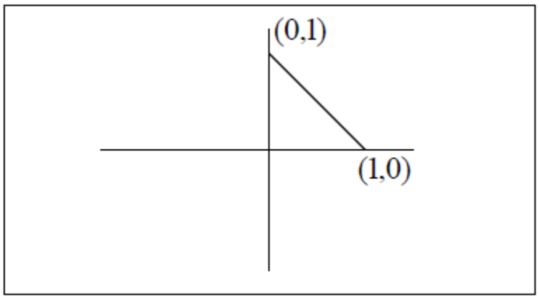


סימנו בציור את R - ההיטל על מישור xy.

לכן, האינטגרל המבוקש הוא:

$$\iiint_A xdxdydz = \iint_R \left[\int_0^{1-x-y} xdz\right]dA = \iint_R \left[x(1-x-y)\right]dA$$

נמצא את ההיטל R על מישור xy.



l הוא ישר החיתוך בין המישור $x+y+z=1$ למישור xy. לכן:

$$l:\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y=1$$

$$y=1-x$$

(לחילופין ניתן למצוא את l באמצעות נוסחת ישר בין שתי נקודות).

לכן,

$$\iiint_A xdxdydz = \iint_R \left[x(1-x-y)\right]dA = \int_0^1\int_0^{1-x}\left[x(1-x-y)\right]dydx = \int_0^1\int_0^{1-x}\left[x-x^2-yx\right]dydx =$$

$$\int_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{y^2x}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{(1-x)^2x}{2}\right]dx =$$

$$\int_0^1 \left[x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x-2x^2+x^3}{2}\right]dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{x^3}{2}\right]dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

4. חשבו $\int_C xyds$ כאשר C היא החצי העליון של המעגל ברדיוס 6 סביב הראשית המכוון עם כיוון השעון.

פתרון: נשים לב, מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, $\int_C xyds = \int_{-C} xyds$

כאשר $C-$ היא החצי העליון של המעגל ברדיוס 6 סביב הראשית המכוון נגד כיוון השעון.

נמצא פרמטריזציה ל $-C$:

$$\gamma(t)=(6\cos t,6\sin t),\qquad 0\le t\le\pi$$

מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, נחשב:

$$\gamma'(t)=(-6\sin t,6\cos t)$$
$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{(-6\sin t)^2+(6\cos t)^2}=\sqrt{36\sin^2 t+36\cos^2 t}=\sqrt{36}=6$$

לכן,

$$\int_C xyds=\int_{-C} xyds=\int_0^\pi 6\cos t6\sin t\cdot 6dt=\int_0^\pi 216\cos t\sin tdt=\left[2\sin t\cos t=\sin 2t\right]=\int_0^\pi 108\sin 2tdt=$$
$$\left[-\frac{108\cos 2t}{2}\right]_0^\pi=\left[-54\cos 2t\right]_0^\pi=-54+54=0$$

5. חשבו $\int_C xds$ כאשר C היא הפרבולה $y=x^2$ מ $x=1$ ל $x=3$.

פתרון: נמצא פרמטריזציה לעקומה המתוארת:

$$\gamma(t)=(t,t^2),\qquad 1\le t\le 3$$

מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, נחשב:

$$\gamma'(t)=(1,2t)$$
$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1^2+(2t)^2}=\sqrt{1+4t^2}$$

לכן,

$$\int_C xds=\int_1^3 t\cdot\sqrt{1+4t^2}dt=\begin{bmatrix}u=1+4t^2\\ du=8tdt\\ 5\le u\le 37\end{bmatrix}=\int_5^{37}\sqrt{u}\,\frac{du}{8}=\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{8\cdot\frac{3}{2}}\right]_5^{37}=\frac{37^{\frac{3}{2}}-5^{\frac{3}{2}}}{12}$$

6. חשבו $\int_C 4xyds$ כאשר C הוא קטע הישר המחבר את $(-2,-1)$ ל $(1,2)$.

פתרון: נמצא פרמטריזציה לישר המתואר:

$$\gamma(t)=(1-t)(1,2)+t(-2,-1),\qquad 0\le t\le 1$$
$$\gamma(t)=(1-t,2-2t)+(-2t,-t)$$
$$\gamma(t)=(1-t-2t,2-2t-t)$$
$$\gamma(t)=(1-3t,2-3t)\qquad\qquad 0\le t\le 1$$

מכיוון שמדובר באינטגרל מסוג ראשון, נחשב:

$$\gamma'(t) = (-3,-3)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

לכן,

$$\int_C 4xyds = \int_0^1 4(1-3t)(2-3t)\sqrt{18}dt = \sqrt{18}\int_0^1 (4-12t)(2-3t)dt = \sqrt{18}\int_0^1 (8-24t-12t+36t^2)dt =$$
$$\sqrt{18}\int_0^1 (8-36t+36t^2)dt = \sqrt{18}\left[8t-18t^2+12t^3\right]_0^1 dt = \sqrt{18}(8-18+12)dt = 2\sqrt{18}$$

7. חשבו $\int_C 4xyds$ כאשר C הוא קטע הישר המחבר את $(1,2)$ ל $(-2,-1)$.

פתרון: נשים לב, $-c =$ קטע הישר המחבר את $(-2,-1)$ ל $(1,2)$.

אבל, מכיוון שמדובר באינטגרל קווי מסוג ראשון,

$$\int_C 4xyds = \int_{-C} 4xyds \underset{ex\_3}{=} 2\sqrt{18}$$

בהצלחה! ☺