# תרגיל בית 11 אלגברה מופשטת 2

1. יהי $R$ חוג קומוטטיבי.

   (א) הוכיחו שלכל מודול חופשי $M$ מעל $R$ מתקיים $Ann_R(M) = 0$, $Tor(M) = 0$.

   (ב) הוכיחו שאם כל אידיאל של $R$ הוא חופשי כ-$R$-מודול, אז $R$ הוא תחום ראשי.

2. יהי $M$ מודול פשוט מעל $R$ ו$I$ אידיאל שמאלי מינימלי של $R$. נתון ש $I \cdot M \neq 0$ הוכיחו כי $M \cong I$ בתור $R$-מודולים.

3. נתבונן ב$\mathbb{F}[x]$-מודול $\mathbb{F}[x]^2 / A\mathbb{F}[x]^2$ כאשר $A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$. מהו המימד של מודול זה כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$?

4. חשב את החלק המפותל של החבורה $\mathbb{Z}^2 / \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \end{pmatrix} \right\rangle$.

5. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית $\left\langle a, b, c \,\middle|\, \begin{array}{c} 2a + 4b + 4c = 0 \\ -6a + 6b + 12c = 0 \\ 10a - 4b - 16c = 0 \end{array} \right\rangle$.

6. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, נתבונן ב$V = \mathbb{Q}^3$ כמודול מעל $\mathbb{Q}[x]$ המושרה מ$A$.

   (א) נרמלו את מטריצת היחסים $xI - A$.

   (ב) מצאו פולינומים $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש $V \cong \mathbb{Q}[x] / \langle f \rangle \oplus \mathbb{Q}[x] / \langle g \rangle$.

(ג) מצאו מטריצה $B \in M_3(\mathbb{Q})$ הצמודה ל$A$ כך ש$B$ היא סכום של שתי מטריצות מלוות.

7. יהי $(V,T)$ מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{R}[x]$. נתון שהפולינום המינימלי של $T$ הוא אי-פריק ושקיים וקטור $v \in V$ כך ש $V = span_{\mathbb{R}}\{T^i v\}$.
הוכיחו כי ל$V$ אין תת מרחב $T$-אינווריאנטי לא טריוויאלי.

8. יהי $(V,T)$ מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{Q}[x]$ כך ש $T\colon V \to V$ הפיך ומקיים $T^{-1} = T^2 + T$.

   (א) הוכח שהמימד של $V$ מתחלק ב3 .

   (ב) נתון כעת שהמימד של $V$ הוא 3, מצא את הצורה הרציונלית קנונית של $T$ .

9. יהי $p$ מספר ראשוני, הוכיחו כי המטריצות הבאות מגודל $p \times p$ צמודות מעל $\mathbb{Z}_p$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$