שאלה 1 (לא מהחוברת)

נראה איך אפשר למצוא בסיס ומימד למרחב המטריצות עם $tr(A)=0$ שנסמנו U. בדרך דומה ניתן לפתור את הסעיפים השונים בשאלה. מה ניתן לומר על מטריצה כללית A המקיימת $tr(A)=0$? באינדקסים שלא על האלכסון אפשר לבחור מה שרוצים. מכיון ש $tr(A)=0$ אז עפ"י הגדרה $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}=0$. לכן אם נבחר את $a_{11},a_{22},\cdots a_{n-1,n-1}$ אז בהכרח $a_{nn}=-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{n-1,n-1}$. מצד שני ברור שאפשר לבחור את $a_{11},a_{22},\cdots a_{n-1,n-1}$ כרצוננו. משמע: ניתן לבחור n^2-1 מאיברי המטריצה כרצוננו ואז האיבר האחרון באלכסון נקבע בצורה יחידה (בגלל האילוץ $tr(A)=0$). נרצה להראות אם כן שהמימד הוא n^2-1. מטריצה כללית היא מהצורה

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & -\sum_{k=1}^{n-1} a_{kk} \end{pmatrix}$$

. לכל $i \neq j$ תהי E_{ij} המטריצה שכל איבריה אפסים פרט ל1 במקום ה ij . עבור $1 \le k \le n-1$ תהי M_{kk} המטריצה שכל איבריה אפסים פרט ל1 במקום ה kk, ו -1 במקום ה nn. עפ"י התיאור שציינו ניתן לראות ש $U=span\{M_{kk},E_{ij}:(1\le i,j\le n)\wedge(i\neq j),\quad 1\le k\le n-1\}$. כמו כן המטריצות האלה בת"ל (למה?). לכן, $\{M_{kk},E_{ij}:(1\le i,j\le n)\wedge(i\neq j),\quad 1\le k\le n-1\}$ בסיס ל U ויש בו בסה"כ $n^2-n+(n-1)=n^2-1$ איברים. (מספר האינדקסים שאינם על האלכסון הוא n^2-n, כדי לחשב זאת שימו לב שיש סה"כ n^2 איברים במטריצה ויש n איברים על האלכסון. כמו כן, מספר המטריצות M_{kk} הוא $n-1$).