תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

6 באפריל 2022

חדוא

חשבו את הקדומות הבאות

1. פעם קודמת ראינו $\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{dx}$ וע"י הצבה $t=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$ הגענו ל

$$\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\mathrm{dx}=\int \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{e^x}}}\mathrm{dx}=\left[\begin{array}{c} t=\frac{1}{\sqrt{e^x}}=e^{-\frac{x}{2}} \\ \mathrm{dt}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{dx}=-\frac{1}{2}t\mathrm{dx} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} t=\frac{1}{\sqrt{e^x}}=e^{-\frac{x}{2}} \\ -2\cdot\frac{1}{t}\mathrm{dt}=\mathrm{dx} \end{array}\right]=$$

$$=-2\int \frac{1}{(1+t)}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{dt}=-2\int \frac{1}{(1+t)\,t}\mathrm{dt}$$

ואמרנו שמפה זה קל בעזרת החומר של שבוע הבא שזה אומר מה שלמדתם לפני שעה. נמשיך מפה בעזרת שברים חלקיים:

הפולינומים $t, 1+t$ אי פריקים ולכן קיימים קבועים A, B כך ש

$$\frac{1}{(1+t)\,t}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t}$$

נמצא ע"י מכנה משותף: נעשה מכנה משותף של $t\,(1+t)$ ונקבל

$$\frac{1}{(1+t)\,t}=\frac{A\cdot t+B\cdot(1+t)}{(1+t)\,t}$$

ולכן המונים שווים ונקבל את השיוויון

$$1=At+B\,(1+t)$$

ומפה יש שתי דרכים סטנדרטיות למצוא את A, B (ואפילו לעשות בינהם מיקס).

דרך ראשונה - הצבת x ים: נציב $t=0$ במשוואה הירוקה ונקבל $B=1$. נציב $t=-1$ ונקבל $-A=1$ ולכן $A=-1$ לכן

$$\frac{1}{(1+t)\,t}=\frac{-1}{1+t}+\frac{1}{t}$$

רק נוודא זאת

$$\frac{-1}{1+t}+\frac{1}{t}=\frac{-t+1\,(1+t)}{(t+1)\,t}=\frac{1}{(1+t)\,t}$$

כפי שרצינו.

הערה: בחירת אלו ערכים t להציב היא לשיקולו של המציבים, אין הגבלה נוספת. כדאי לבחור הצבה שתגרום לחישובים להיות פשוטים אבל זה לא חובה. למשל יכלנו גם להציב $t=1$ לקבל $A+2B=1$ ולהציב $t=2$ לקבל $2A+3B=1$

ולפתור מערכת עם שתי משוואות עם שתי נעלמים.
דרך שניה - השוואת מקדמים של פולינום: יש לנו $1 = At + B(1+t)$ ושני צידי המשוואה זה אותו פולינום. נסדר את הצד הימני

$$At + B(1+t) = At + B + Bt = B + (A+B)t$$

ומכיוון ש

$$1 + 0 \cdot t = B + (A+B)t$$

המקדם החופשי שווה, כלומר $B = 1$ והמקדם של t שווה, כלומר $A + B = 0$ רואים גם מפה ש $B = 1$ ו

$$A = -B = -1$$

כעת, נחזור לאינטגרל שלנו:

$$-2\int \frac{1}{(1+t)t}\text{dt} = -2\left[\int \left(\frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\right)\text{dt}\right] = -2\left(-\ln|1+t| + \ln|t|\right) + C =$$

$$= 2\ln|1+t| - 2\ln|t| + C = 2\ln\left|1 + \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right| - 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{e^x}}\right| + C$$

שימו לב שפעם קודמת יצא לנו

$$2\ln\left|\sqrt{e^x} + 1\right| + C$$

מה שאומר ש ההפרש

$$\left[2\ln\left|1 + \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right| - 2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{e^x}}\right|\right] - \left[2\ln\left|\sqrt{e^x} + 1\right|\right]$$

קבוע. נשחק קצת:

$$2\ln\left(\frac{\sqrt{e^x}+1}{\sqrt{e^x}}\right) - 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^x}}\right) = 2\ln\left(\sqrt{e^x}+1\right) - 2\ln\left(\sqrt{e^x}\right) + 2\ln\left(\sqrt{e^x}\right) = 2\ln\left(\sqrt{e^x}+1\right)$$

וגילנו שהקבוע הוא 0.

2. $\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\text{dx}$

פתרון: אצלנו המונה קטן בדרגתו (ממש) מהמכנה ולכן אין צורך לבצע חילוק פולינומים. אם היינו עושים חילוק פולינומים, מה היה קורה? בערך כלום.

$$3x + 7 = 0 \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) + (3x+7)$$

נמשיך עם שברים חלקיים ובשביל זה צריך לפרק את המכנה לגורמים אי-פריקיים. צריך לשאול האם $x^2 - 3x + 2$ פריק או לא וזה תלוי אם יש לו שורש או לחילופין

$$(-3)^2 < 4 \cdot 1 \cdot 2$$

וזה לא ולכן יש שורש ולכן הוא פריק (כל זה נכון כי זה פרבולה, פולינומים מדרגה 2). מה הפירוק?

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

ולכן קיימים קבועים A, B כך ש

$$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

כמו מקודם, נעשה מכנה משותף ונשווה מונים לקבל

$$3x+7=A\left(x-2\right)+B\left(x-1\right)$$

נעשה בשתי דרכים (כמו מקודם).
הצבה של x ים: נציב $x=2$ לקבל $B=13$ ונציב $x=1$ לקבל $-A=10$ ולכן $A=-10$.
השוואת מקדמי פולינום: צד ימין הוא הפולינום

$$A\left(x-2\right)+B\left(x-1\right)=Ax-2A+Bx-B=\left(-2A-B\right)+\left(A+B\right)x$$

ומהשיווון

$$7+3x=\left(-2A-B\right)+\left(A+B\right)x$$

נקבל את המשוואות

$$\begin{cases}7= & -2A-B\\ 3= & A+B\end{cases}$$

נפתור זאת עם מטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|c}-2 & -1 & 7\\ 1 & 1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & 10\\ 1 & 1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 13\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -10\\ 0 & 1 & 13\end{array}\right)$$

וקיבלנו, שוב, $A=-10$ ו $B=13$. כעת, נחזור לאינטגרל:

$$\int\frac{3x+7}{x^2-3x+2}\mathrm{dx}=\int\frac{-10}{x-1}+\frac{13}{x-2}\mathrm{dx}=-10\ln\left|x-1\right|+13\ln\left|x-2\right|+C$$

3. $\int\frac{x^2+5x+7}{\left(x-3\right)^3}\mathrm{dx}$
פתרון: המונה קטן ממש בדרגתו מהמכנה ולכן אין צורך לעשות חילוק פולינומים.
במכנה יש לנו גורם אי פריק יחיד $x-3$ שהוא בחזקת 3 ולכן קיימים A,B,C קבועים כך ש

$$\frac{x^2+5x+7}{\left(x-3\right)^3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{\left(x-3\right)^2}+\frac{C}{\left(x-3\right)^3}$$

נכפיל את השיויון ב $\left(x-3\right)^3$ לקבל

$$x^2+5x+7=A\left(x-3\right)^2+B\left(x-3\right)+C$$

נציב $x=3$ לקבל $C=3^2+15+7=31$. קיבלנו

$$\begin{aligned}x^2+5x+7&=A\left(x-3\right)^2+B\left(x-3\right)+31\\&=A\left(x^2-6x+9\right)+B\left(x-3\right)+31\\&=\left(31-3B+9A\right)+\left(-6A+B\right)x+Ax^2\end{aligned}$$

ומהשוואת מקדמים

$$\begin{cases}7= & 31-3B+9A\\ 5= & -6A+B\\ 1= & A\end{cases}$$

מהמשוואה השלישית $A=1$ ונציב במשוואה השניה לקבל

$$B=5+6A=11$$

(אין צורך לוודא האם וכמה פתרונות יש למערכת כיוון שמובטח לנו שיש פתרון יחיד ל A,B,C). כדאי לוודא שאכן

$$\frac{1}{x-3}+\frac{11}{(x-3)^2}+\frac{31}{(x-3)^3}=\frac{(x-3)^2+11\,(x-3)+31}{(x-3)^3}=\frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}$$

נחזור לאינטגרל:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}\mathrm{dx}&=\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{11}{(x-3)^2}+\frac{31}{(x-3)^3}\right)\mathrm{dx}\\&=\int\left(\frac{1}{x-3}+11\,(x-3)^{-2}+31\,(x-3)^{-3}\right)\mathrm{dx}\\&=\ln|x-3|+11\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+31\frac{(x-3)^{-2}}{-2}+C\\&=\ln|x-3|-\frac{11}{x-3}-\frac{1}{2}\frac{31}{(x-3)^2}+C\end{aligned}$$

4. $\int\frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{dx}$

פתרון: הדרגה של המונה גדולה מדרגת המכנה ולכן נתחיל עם חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & \\ \hline x^5 & x^3+1 \\ x^5+x^2 & \\ ---- & \\ -x^2 & \end{array}$$

קיבלנו $x^5=\left(x^3+1\right)x^2-x^2$ או

$$\frac{x^5}{x^3+1}=\frac{\left(x^3+1\right)x^2-x^2}{x^3+1}=\frac{\left(x^3+1\right)x^2}{x^3+1}-\frac{x^2}{x^3+1}=x^2-\frac{x^2}{x^3+1}$$

ולכן

$$\int\frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{dx}=\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{dx}$$

ונמשיך עם $\int\frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{dx}$ בלבד. נרצה להשתמש בשברים חלקיים ובשביל זה נפרק את המכנה לגורמים אי-פריקים (בטוח אפשר גם הדרגה היא 3). באופן כללי לא פשוט למצוא שורשים לפולינומים מדרגה 3(אם כי יש אלגוריתם לדבר), אצלנו נשתמש ב"ניחוש" שורש כי רואים ש -1 הוא שורש של x^3+1. כיוון ש -1 שורש נקבל ש

$$x^3+1=(x-(-1))\,p(x)=(x+1)\,p(x)$$

עבור $p(x)$ פולינום מדרגה 2 שנמצא תכף. נבצע חילוק נוסף:

$$\begin{array}{c|c} x^2-x+1 & \\ \hline x^3+1 & x+1 \\ x^3+x^2 & \\ ---- & \\ -x^2+1 & \\ -x^2-x & \\ ---- & \\ 1+x & \\ 1+x & \\ ---- & \\ 0 & \end{array}$$

לכן

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

נשים לב ש x^2-x+1 אי פריק כיוון ש $4\cdot 1\cdot 1 > (-1)^2$.
נזכיר שבפירוק לשברים חלקיים, מעל גורמים אי פריקים מדרגה 2 (ולא משנה באיזה חזקה) יופיע גורם $Ax+B$. ולכן קימיים קבועים A,B,C כך ש

$$\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{x^2}{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{C}{x+1}$$

נכפיל ב $\left(x^2-x+1\right)(x+1)$ לקבל

$$x^2=(Ax+B)(x+1)+C\left(x^2-x+1\right)$$

נציב $x=-1$ ונקבל $(-1)^2=3C$ ולכן $C=\frac{1}{3}$. נציב $x=0$ לקבל

$$0=B+C=B+\frac{1}{3}$$

ולכן $B=-\frac{1}{3}$. נציב $x=1$ לקבל

$$1=\left(A-\frac{1}{3}\right)\cdot 2+\frac{1}{3}$$

ולכן

$$A=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

ונחזור לאינטגרל:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{dx}&=\int\left[\frac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right]\mathrm{dx}\\&=\frac{1}{3}\int\left[\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x+1}\right]\mathrm{dx}\\&=\frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C\end{aligned}$$

ולכן לסיכום התרגיל:

$$\int \frac{x^5}{x^3+1}\mathrm{dx} = \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{x^3+1}\mathrm{dx} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$$

5. $\int \frac{x}{x^2-x+1}\mathrm{dx}$

פתרון: כמו שראינו המכנה הוא אי - פריק. נתחיל בלהפטר מה x שבמונה

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right]\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx}$$

נמשיך עם $\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx}$ בלבד. היינו שמחים ל"התמודד" עם $\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt} = \arctan(t)$ אבל זה לא המצב אצלנו אבל נגרום לו להיות כזה... נעשה השלמה לריבוע - דרך להפוך x^2+bx+c לצורה t^2+d: אצלנו

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{4}\right) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ולכן

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{0.75\left[\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{0.75}+1\right]}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{0.75}\int \frac{1}{\left(\frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}}\right)^2+1}\mathrm{dx} = \begin{bmatrix} t = \frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}} \\ \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{0.75}}\mathrm{dx} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{0.75}\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{\sqrt{0.75}}{0.75}\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan(t) + C = \frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan\left(\frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}}\right) + C$$

לסיכום, קיבלנו:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-x+1}\mathrm{dx} &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0.75}}\arctan\left(\frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}}\right) + C\end{aligned}$$

לינארית

1. פתרו את המערכת (המרוכבת)

$$\begin{cases} i\cdot x+(1+i)\cdot y & =8\\ (1+i)\cdot x+i\cdot y & =2 \end{cases}$$

פתרון: נעבוד עם מטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 8\\ 1+i & i & 2 \end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 8\\ 1 & -1 & -6 \end{array}\right)\xrightarrow{iR_2}\left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 8\\ i & -i & -6i \end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 8\\ 0 & -1-2i & -6i-8 \end{array}\right)$$

במשוואה השניה יש לנו כרגע $(-1-2i)\,y=-6i-8$ ולכן

$$y=\frac{-6i-8}{-1-2i}=\frac{6i+8}{1+2i}=\left(\frac{6i+8}{1+2i}\right)\cdot\left(\frac{1-2i}{1-2i}\right)=\frac{20-10i}{1^2+2^2}=4-2i$$

נחזור למטריצה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 8\\ 0 & -1-2i & -6i-8 \end{array}\right)\xrightarrow{(-1-2i)^{-1}R_2}\left(\begin{array}{cc|c} i & 1+i & 8\\ 0 & 1 & 4-2i \end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c} i & i & 4+2i\\ 0 & 1 & 4-2i \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & i & 4+2i\\ 0 & 1 & 4-2i \end{array}\right)\xrightarrow{-iR_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-4i\\ 0 & 1 & 4-2i \end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2-2i\\ 0 & 1 & 4-2i \end{array}\right)$$

וקיבלנו את המערכת

$$\begin{cases} x= & -2-2i\\ y= & 4-2i \end{cases}$$

ולכן [דרוש עוד הצדקה למה הפתרונות נשמרים בפעולות שעשינו על המטריצה - על כך ועוד בהרצאה בשבוע הבא]
יש פתרון יחיד למערכת שהוא

$$\begin{pmatrix} -2-2i\\ 4-2i \end{pmatrix}$$