סיכום – דרכי אינטגרציה

1. אינטגרלים מיידיים

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

נשתמש בהשלמה לריבוע אם קיבלנו אינטגרל של פונקציה רציונאלית כשבמונה גורם לינארי (שאינו הנגזרת של המכנה) ובמכנה פולינום ממעלה שנייה.

2. אינטגרציה בחלקים

הכלל:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

יישום: בוחרים פונקציה שאנו יודעים את האינטגרל שלה, ואת הפונקציה השנייה גוזרים. אם אנו יודעים את האינטגרלים של שתי הפונקציות, בוחרים אחת מהן – זו שתפתור את הבעיה.

3. אינטגרציה בהצבה

הכלל:

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + c$$

יישום: מזהים מכפלה של הרכבת פונקציות בנגזרת של הפונקציה הפנימית. מסמנים את הפונקציה הפנימית כנעלם חדש ומקבלים אינטגרל שונה.

4. ההצבה הטריגונומטרית האוניברסלית

בהינתן פונקציית מנה שבה רק פונקציות טריגונומטריות, נבצע את ההצבה:

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

יתרון:

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

יישום: לרוב מומלץ לא להשתמש בדרך זו, אלא לחפש דרכים אחרות פשוטות יותר. אם החלטנו להשתמש בדרך זו, מציבים את ההצבות הנ"ל.

5. פירוק לשברים חלקיים

בהינתן פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$, כאשר $P(x), Q(x)$ פולינומים, רוצים לפרק את זה לשברים חלקיים. נניח $\deg P < deq\ Q$ (אחרת מחלקים פולינומים).

נפרק את $Q(x)$ לגורמים אי־פריקים. נניח שהפירוק הינו (כאשר $\deg R_i = 1, \deg S_j = 2$):

$$\left(x-a_1\right)^{e_1}\left(x-a_2\right)^{e_2}\ldots\left(x-a_m\right)^{e_m}\left(x^2-b_1x+c_1\right)^{f_1}\left(x^2-b_2x+c_2\right)^{f_2}\ldots\left(x^2-b_1x+c_n\right)^{f_n} =$$
$$= R_1\left(x\right)^{e_1}\ldots R_m\left(x\right)^{e_m} S_1\left(x\right)^{f_1}\ldots S_n\left(x\right)^{e_n}$$

<u>משפט:</u> אם $Q(x)$ מתפרק כנ"ל, אזי:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{R_1(x)} + \ldots + \frac{A_{1,e_1}}{R_1(x)^{e_1}} + \frac{A_{2,1}}{R_2(x)} + \ldots + \frac{A_{2,e_2}}{R_2(x)^{e_2}} + \ldots + \frac{A_{m,1}}{R_m(x)} + \ldots + \frac{A_{m,e_m}}{R_m(x)^{e_m}} +$$
$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{S_1(x)} + \ldots + \frac{B_{1,f_1}x + C_{1,f_1}}{S_1(x)^{f_1}} + \ldots + \frac{B_{n,1}x + C_{n,1}}{S_n(x)} + \ldots + \frac{B_{n,f_n}x + C_{n,f_n}}{S_n(x)^{f_n}}$$

יישום: כשיש לנו אינטגרל של פונקציה רציונאלית, ניתן לפרק כך ולקבל אינטגרלים פשוטים יותר.

6. הצבת אוילר

יישום: בהינתן פונקציה "רציונאלית" שרכיביה הם $x, \sqrt{ax^2+bx+c}$, ננקוט באחת הגישות הבאות:

א. אם הפולינום ax^2+bx+c פריק, ונניח α שורש שלו, אזי נוכל להציב:
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = u(x-\alpha)$$

ב. אם $a > 0$, נוכל להציב:
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + u$$

ג. אם $c > 0$, נוכל להציב:
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xu + \sqrt{c}$$

7. פונקציה רציונאלית $p(x)/q(x)$

אם $\deg p = \deg q - 1$, נחפש c שעבורו $h = cp - q'$ יהיה ממעלה נמוכה יותר מ-p, ונציב את p.
אם $\deg p < \deg q - 1$, נפרק לשברים חלקיים. אחרת, נבצע חילוק פולינומים.

8. הצבה נוספת

בהינתן פונקציה "רציונאלית" שרכיביה הם x וחזקות של השבר $\frac{ax+b}{cx+d}$ (נסמן את החזקות $(n_1, \ldots, n_k$, נסמן $r = \gcd\{n_1, \ldots, n_k\}$, ואז נציב $\frac{ax+b}{cx+d} = u^r$.

כמובן, ניתן להציב כראות עינינו, לפי כל אינטגרל בפני עצמו.