

פתרון תרגיל 10 מרוכבות תיכוניסטים תשע"ח

20 ביוני 2018

1. נשתמש במשפט השארית.

(א) בתוך העיגול, לפונקציה יש סינגולאריות אחת - $z = 2$, והיא קוטב מסדר 2. לכן, אפשר לחשב את השארית לפי הנוסחה:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{3}{(5-z)(z-2)^2}, 2 \right) = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left(\frac{3}{5-z} \right) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{3}{(5-z)^2} = \frac{1}{3}$$

ולכן, האינטגרל הוא $\frac{1}{3} \cdot 2\pi i$.

(ב) הסינגולאריות היחידה היא $z = 0$. נשתמש בטור הידוע:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \implies e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n}}{n!}$$

ולכן:

$$z^3 e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n+3}}{n!}$$

השארית היא המקדם של z^{-1} , מתקבלת כאשר $n = 2$: $\frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}$, ולכן האינטגרל הוא: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi i = \pi i$.

(ג) הסינגולאריות היחידה בתחום היא $z = 1$, והיא קוטב מסדר 6. אפשר לחשב את השארית לפי הנוסחה:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^6}{(z-4)(z-1)^6}, 1 \right) = \frac{1}{(6-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^{6-1}}{dz^{6-1}} \left(\frac{z^6}{z-4} \right) = \frac{1}{5!} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^5}{dz^5} \left(\frac{z^6}{z-4} \right)$$

נגזור 5 פעמים, מה לעשות. אפשר לגזור את המכפלה לפי כלל לייבניץ, אם רוצים. הנגזרת החמישית היא:

$$-\frac{120z^6}{(z-4)^6} + \frac{720z^5}{(z-4)^5} - \frac{1800z^4}{(z-4)^4} + \frac{2400z^3}{(z-4)^3} - \frac{1800z^2}{(z-4)^2} + \frac{720z}{z-4}$$

אם מציבים $z = 1$ מקבלים $-\frac{251320}{243}$, והאינטגרל הוא $-\frac{251320}{243} \cdot 2\pi i$.

(ד) הסינגולאריות הן האפסים של $\sin z$, בתחום יש שלושה כאלו: $0, \pm\pi$, וכולם פשוטים. לכן:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, 0\right) = \frac{1+0}{\cos 0} = 1, \quad \operatorname{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, \pi\right) = \frac{1+\pi}{\cos \pi} = -1 - \pi$$

וגם: $\operatorname{Res}\left(\frac{1+z}{\sin z}, -\pi\right) = \frac{1-\pi}{\cos(-\pi)} = -1 + \pi$. לכן, האינטגרל הוא:

$$(1 - 1 - \pi - 1 + \pi) \cdot 2\pi i = -2\pi i$$

2. הפונקציה שלמה, בפרט אנליטית בעיגול שלנו - אין לה קטבים. $z = 0$ היא אפס מסדר 3, $z = 1$ היא אפס מספר 4, $z = 2$ היא אפס מסדר 5. כלומר, סה"כ 12 אפסים, ולכן לפי עקרון הארגומנט:

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot (12 - 0) = 24\pi i$$