תרגול 12

31 בדצמבר 2013

מטירצת הקופקטורים והמטריצה הצמודה

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי מטריצת הקופקטורים (מסומן $cof(A)\in\mathbb{F}^{n\times n}$) מוגדרת $(cof(A))_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$ כאשר $M_{i,j}$ הוא המינור i,j . (שימו לב שהביטוי דומה לביטוי שמופיע בפיתוח דטר' לפי שורה רק בלי התוספת של הכפלה באיבר ה $a_{i,j}$)

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}0&1&5\\-1&-3&0\\1&3&-4\end{pmatrix}$ (ראינו שיעור קודם כי $|A|=-4$) מצא את $cof(A)$

פתרון: באופן כללי $cof(A)=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}$

$$M_{1,1}=det(\begin{pmatrix}-3&0\\3&-4\end{pmatrix})=12,\ M_{2,1}=det(\begin{pmatrix}1&5\\3&-4\end{pmatrix})=-19$$

$$M_{3,1}=det(\begin{pmatrix}1&5\\-3&0\end{pmatrix})=15$$

ולכן (עם חישובים נוספים) $cof(A)=\begin{pmatrix}12&-4&0\\19&-5&1\\15&-5&1\end{pmatrix}$.

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי המטריצה המצורפת היא $adj(A)=[cof(A)]^t$.

משפט: $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I_n$ (בפרט אם A הפיכה אזי $A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}$)

דוגמא: $\begin{pmatrix}0&1&5\\-1&-3&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12&-4&0\\19&-5&1\\15&-5&1\end{pmatrix}^t=-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&1&5\\-1&-3&0\\1&3&-4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}12&-4&0\\19&-5&1\\15&-5&1\end{pmatrix}^t$$

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה הוכח : $|adj(A)|=|A|^{n-1}$

הוכחה: נסמן $0\neq\alpha=|A|$ (כיוון ש A הפיכה) לפי משפט מתקיים $A\cdot adj(A)=\alpha\cdot I_n$ ולכן $\alpha\cdot|adj(A)|=|A|\cdot|adj(A)|=|\alpha I_n|=\alpha^n|I_n|=\alpha^n$. נחלק ב α ונקבל את הדרוש.

תרגיל (מבוסס על מבחן תשע"ג מועד א'): יהיה n אי זוגי ויהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימות $AB\cdot adj(BA)=I$. הוכח כי $AB=BA$.

פתרון: מהנתון נובע כי $|AB|^n = |AB| \cdot |BA|^{n-1} = |AB| \cdot |adj(BA)| = 1$. ולכן $|AB| = 1$ בפרט AB הפיכה.
לכן $I = AB \cdot adj(BA) = AB \cdot |BA|(BA)^{-1} = AB \cdot (BA)^{-1}$ ולכן $BA = AB$

הפולינום האופיני

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אזי $f_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ הוא הפולינום האופני שלה.
דוגמא $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \lambda-5 & -6 \\ 3 & \lambda+4 \end{pmatrix}| \\ &= (\lambda-5)(\lambda+4)+18 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

הערה: המעלה של הפולינום האופיני הוא n
תרגיל: מהו הפולינום האופיני של $I_n, 0_n$
פתרון $f_I(\lambda) = |\lambda I - I| = (\lambda-1)^n$, $f_0(\lambda) = |\lambda I - 0| = (\lambda)^n$
תרגיל: הוכח שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני.
פתרון יהיו A, B מטריצות דומות (כלומר $A = PBP^{-1}$) אזי

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - PBP^{-1}| = |\lambda P I_n P^{-1} - PBP^{-1}| \\ &= |P(\lambda I_n - B)P^{-1}| = |P| \cdot |(\lambda I_n - B)| \cdot |P^{-1}| \\ &= |P^{-1}| \cdot |P| \cdot |(\lambda I_n - B)| = |(\lambda I_n - B)| = f_B(\lambda) \end{aligned}$$

ע"ע (ערכים עצמיים), ו"ע (וקטורים עצמיים) והמרחב העצמי

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = \lambda v$ אזי v יקרא ו"ע, λ יקרא ע"ע.
חידוד: $v \neq 0$ אבל יתכן $\lambda = 0$.
דוגמא:

1. $A = I$ אזי לכל v מתקיים $Av = v$ ולכן עבור מטריצת היחידה $\lambda = 1$ הוא ע"ע וכל וקטור הוא ו"ע (של 1) .
2. $A = 0$ אזי לכל v מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$ ולכן עבור מטריצת האפס $\lambda = 0$ הוא ע"ע וכל וקטור הוא ו"ע (של 0).

איך מוצאים ע"ע ו"ע?

$Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0, v \neq 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0, v \neq 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)$ לא הפיכה $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow f_A(\lambda) = 0$.
כלומר λ הוא ע"ע של A אמ"מ $f_A(\lambda) = 0$.

דוגמא $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ מצאנו כי $f_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$
ולכן $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$ הם ע"ע של A.
אחרי שיודעים ע"ע ־ איך מוצאים ו"ע?
עבור מטריצה A נניח שמצאנו ע"ע λ אזי הו"ע המתאים (לע"ע λ) מקיים $(A-\lambda I)v=0$
כלומר $v\in N(A-\lambda I)$
דוגמא: $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ $\lambda_1=2$ נמצא ו"ע מתאים.
ש"ל $v\in N(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$) כלומר $v\in N(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix})$.
נדרג $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן ($\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\in N(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix})$
ולכן הוא ו"ע המתאמים ל $\lambda_1=2$.
אכן מתקיים $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
באותו אופן נמצא ו"ע ל $\lambda_2=-1$. נמצא $v\in N(\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$
נדרג $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כלומר $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל $\lambda_2=-1$.
תרגיל: יהיו A,B שתי מטריצות הוכח: ע"ע של BA שווים לע"ע של AB.
הוכחה: תרגיל (פצל למקרים אם $\lambda=0$ ואם $\lambda\neq 0$)
לסיכום־ בהנתן מטריצה A

1. בעזרת $f_A(\lambda)=0$ נמצא ע"ע של A
2. לאחר שמצאנו λ ע"ע של A וקטור עצמי מתאים הוא $0\neq v\in N(A-\lambda I)$

תרגיל: מצא ע"ע ו"ע של $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון: $f_A(\lambda)=|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}|=(\lambda-1)^2\lambda^2$
כלומר $\lambda_1=1,\ \lambda_2=0$. נמצא ו"ע: עבור $\lambda_1=1$

$$N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix})=$$

$$\{\begin{pmatrix} t \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}=span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

עבור $\lambda_1=0$

$$N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

חידוד (מהתרגיל): לע"ע λ_0 יתכנו כמה ו"ע (בת"ל) ואין שיווין הכרחי בין המספר הזה לבין מספר הפעמים בו מופיע $\lambda - \lambda_0$ בפולינום האופיני.

תרגיל: נניח $Av = \lambda v,\ v \neq 0$ (כלומר v ו"ע) הוכח: גם αv ו"ע המתאים לא λ לכל $\alpha \neq 0$

הוכחה: $A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$. כיוון ש $\alpha \neq 0,\ v \neq 0$ אזי גם $\alpha v \neq 0$.

משפט: תהא Aמטריצה עם $\lambda_1 \dots \lambda_m$ ע"ע שונים, $v_1, \dots v_m$ ו"ע עצמיים מתאימים אזי $\{v_1, \dots v_m\}$ בת"ל

הגדרה: בסימונים לעיל המרחב העצמי של λ הוא $V_\lambda = N(A - \lambda I)$

הערה: $V_\lambda = \{v \,|Av = \lambda \cdot v,\, v \text{ eigenvector}\} \cup \{0\}$

הערה: בסימונים האלה, מהמשפט נובע כי $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ לכל $i \neq j$

אפילו $V_{\lambda_i} \cap (\bigoplus_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \{0\}$

ליכסון

הגדרה: Aתקרא לכסינה אם A דומה למטריצה אלכסונית (כלומר קיים Pהפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$ אלכסונית)

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ע"ע

ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ כעת:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(v_1, v_2) = P^{-1}(Av_1, Av_2) \\ &= P^{-1}(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = P^{-1}(v_1, v_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר A לכסינה.

משפט: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה $\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$ (הוכח בכיתה)

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נתון A לכסינה קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

נסמן $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = AP = PD = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$ כלומר v_i ע"ע וכיוון ש P הפיכה הם בת"ל (ובפרט $v_i \neq 0$לכל i) ולכן בסיס ל $\mathbb{F}^n$

$(\Rightarrow)$ יש בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ של ו"ע כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל: קבע האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$לכסינה כאשר:

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ממשית.
פתרון: $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}| = \lambda^2 + 1$ כיוון של f_A אין שורשים בממשים בפרט אין ל A ו"ע ולכן A אינה לכסינה.

2. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$מטריצה מרוכבת.
פתרון: $f_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ השורשים הם $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ נמצא ו"ע.
עבור $\lambda_1 = i$. $N(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ו"ע.
עבור $\lambda_1 = -i$. $N(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ו"ע.
קל לראות ש $\{v_1, v_2\}$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A לכסינה.

תרגיל: האם כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ לכסינה?
פתרון: לא! למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}| = (\lambda - 1)^2$.
$\lambda = 1$ ע"ע יחיד.
ו"ע: $N(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע יחיד בפרט אין בסיס של ו"ע ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A אינה לכסינה.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ (כלומר הדטרמינטטה שווה למכפלה הע"ע)
פתרון: תרגיל (העזר בטענה משיעור קודם כי למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה)
תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הוכח: A אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ ל A יש ע"ע ששווה ל-0
פתרון:$(\Rightarrow)$ אם ל A יש ע"ע 0 אזי קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = 0$ אזי A לא הפיכה.

($\Leftarrow$) אם A אינה הפיכה אזי קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = 0$ כלומר 0 ע"ע.

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ חשב את A^{2013}.

פתרון: ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ ע"ע

ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ויתקיים $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ או לחילופין $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

כעת

$$\begin{aligned} A^{2013} &= \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{2013} \\ &= \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \cdot \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \cdots \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \\ &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2013} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & (-1)^{2013} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ $a_i \neq a_j$ הוכח: A לכסינה.

פתרון : היעזר במשפט: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה$\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$

תרגיל: הוכח ש $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{17} & 3 \end{pmatrix}$ מטריצות דומות.

פתרון: תרגיל: היעזר בתרגיל הקודם.

הצבה בפולינום

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_m x^m \in \mathbb{F}[x]$ אזי הצבה של A בפולינום $f(x)$

מוגדר להיות $f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 \cdots a_m A^m$.

דוגמא: חשב את ההצבה של $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ בפולינום $f(x) = x^2 - x - 2$

פתרון:

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - A - 2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

משפט קיילי: תהא A ו $f_A(\lambda)$ הפולינום האופיני. אזי $f_A(A) = 0$