

דף תרגילים 6

תרגיל 1 מוצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה $x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \frac{-au^1 - bu^2 - d}{c})$ של המישור $ax + by + cz = d$.

פתרון 1

$$x_1 = (1, 0, \frac{-a}{c})$$

$$x_2 = (0, 1, \frac{-b}{c})$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2}{c^2} & \frac{ab}{c^2} \\ \frac{ab}{c^2} & 1 + \frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

תרגיל 2 מוצאו פרמטריזציה של גליל כמשטח סיבוב סביב ציר z . מוצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה שמצאתם.

פתרון 2 יהי $a \in \mathbb{R}$ הרדיוס. פרמטריזציה של העקומה במישור xz

$$r(\phi) = a$$

$$z(\phi) = \phi$$

משטח הסיבוב

$$x(\theta, \phi) = (a \cos \theta, a \sin \theta, \phi)$$

הוקטורים המשיקים

$$x_\theta = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0)$$

$$x_\phi = (0, 0, 1)$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi \rangle & \langle x_\phi, x_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3 מוצאו פרמטריזציה של חרוט כמשטח סיבוב סביב ציר z . מוצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה שמצאתם.

פתרון 3 נקח למשל את הקו הישר $z = x$ במישור xz :

$$r(\phi) = \phi$$

$$z(\phi) = \phi$$

משטח הסיבוב

$$x(\theta, \phi) = (\phi \cos \theta, \phi \sin \theta, \phi)$$

כלומר

$$x_\theta = (-\phi \sin \theta, \phi \cos \theta, 0)$$

$$x_\phi = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

לכו

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi \rangle & \langle x_\phi, x_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4 מציאו את (g_{ij}) עבור ההליקואיד $x(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, u^2)$

פתרון 4

$$x_1 = (\cos u^2, \sin u^2, 0)$$

$$x_2 = (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, 1)$$

לכו

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + (u^1)^2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 5

1. מציאו את משטח הסיבוב של העקומה $(\cosh \phi, 0, \phi) = (r(\phi), 0, z(\phi))$ סביב ציר ה- z . למשטח המתקבל קוראים קטנואיד. שימו לב:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

וקל לראות כי

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \sinh'(x) = \cosh(x)$$

2. מציאו את מקדמי המטריקה.

פתרון 5 משטח הסיבוב

$$x(\theta, \phi) = (\cosh \phi \cos \theta, \cosh \phi \sin \theta, \phi)$$

כלומר

$$x_\theta = (-\cosh \phi \sin \theta, \cosh \phi \cos \theta, 0)$$

$$x_\phi = (\sinh \phi \cos \theta, \sinh \phi \sin \theta, 1)$$

לכו

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi \rangle & \langle x_\phi, x_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi & 0 \\ 0 & \sinh^2 \phi + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi & 0 \\ 0 & \cosh^2 \phi \end{pmatrix} = \cosh^2 \phi \delta_j^i$$

תרגיל 6

1. מציאו פרמטריזציה של הספירואיד המתקבל מסיבוב של האליפסה במישור xz

$$2x^2 + 3(z - 4)^2 = 5$$

סביב ציר z .

2. מציאו את מקדמי המטריקה עבור הפרמטריזציה שמצאתם.

פתרון 6 פרמטריזציה של האליפסה הנתונה במישור xz

$$\phi \mapsto \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \cos \phi, 0, 4 + \frac{\sqrt{15}}{3} \sin \phi \right)$$

משטח הסיבוב

$$x(\theta, \phi) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \cos \phi \cos \theta, \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \phi \sin \theta, 4 + \frac{\sqrt{15}}{3} \sin \phi \right)$$

כלומר

$$x_\theta = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \cos \phi \sin \theta, \frac{\sqrt{10}}{2} \cos \phi \cos \theta, 0 \right)$$

$$x_\phi = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \sin \phi \cos \theta, -\frac{\sqrt{10}}{2} \sin \phi \sin \theta, \frac{\sqrt{15}}{3} \cos \phi \right)$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi \rangle & \langle x_\phi, x_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \sin^2 \phi + \frac{5}{3} \cos^2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} (3 - \cos^2 \phi) \end{pmatrix}$$