לינארית 2 תשפ"ג מועד ג

מרצה: ד"ר עדי בן צבי ואריאל ויצמן.
מתרגלים: אריאל ויצמן, גלעד פורת קורן, נעה כהן, כנה נהיר, אלעד עטיא, ניר שרייבר.
יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 104 נק.
זמן הבחינה: 3 שעות.
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. יהיו U,V ממ"פ. הוכיחו כי ההעתקה הצמודה של T קיימת ויחידה. (15 נק)

2. יהי $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$. נגדיר כי:

$$\forall A,B\in V\ \ :<A,B>=tr(AB^*)$$

(א) הוכיחו כי זו מכפלה פנימית על V. (6 נק')

(ב) נגדיר את $W\subseteq V$ להיות מרחב המטריצות האלכסוניות. מצאו את ההטלה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$ על W. (7 נק')

3. תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך A הפיכה וכך שלכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $||Av||=||Bv||$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (8 נק' לסעיף)

(א) B הפיכה.

(ב) A,B אוניטריות.

(ג) AB^{-1} אוניטרית.

4. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש A^tA היא מטריצה סקלרית, כלומר, קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש $A^tA=aI$.

(א) הוכיחו כי אם $a=0$ אזי $A=0$. (5 נק')

(ב) הוכיחו כי אם $a\neq 0$ אזי $a>0$. (5 נק')

(ג) הוכיחו כי לכל a קיים $b\in\mathbb{R}$ ומטריצה או"ג Q כך ש $A=bQ$. (12 נק')

5. אין קשר בין הסעיפים הבאים:

(א) יהי $n\geq 2$ ותהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת ש $tr(A)=0$, $rank(A)=1$. מהם הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של A? (10 נק)

(ב) (10 נק) יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $U\leq V$ ת"מ. נגדיר את הקבוצה:

$$U^0=\{T:V\longrightarrow\mathbb{F}\mid \forall u\in U\ T(u)=0\}$$

הוכיחו כי לכל $T\in U^0$ קיים $w\in U^\perp$ כך ש

$$\forall v\in V:\ \ T(v)=\langle v,w\rangle$$

(ג) יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, ויהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $T + T^* = TT^*$. הוכיחו כי T ניתן ללכסון. (10 נק)

(רמז בשווי 3 נק' מתוך הסעיף: נסו תחילה להוכיח כי $I - T$ אוניטרי).

בהצלחה!!

שאלה 1: יהיו U,V ממ"פ. הוכיחו כי ההעתקה הצמודה של T קיימת ויחידה. (15 נק)

פתרון:

פתרון שאלה 1 (המשך)

<u>שאלה 2:</u> יהי $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$. נגדיר כי:

$$\forall A,B\in V \ \ :<A,B>=tr(AB^*)$$

א. הוכיחו כי זו מכפלה פנימית על V. (6 נק')

ב.נגדיר את $W\subseteq V$ להיות מרחב המטריצות האלכסוניות. מצאו את ההטלה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 3 \end{pmatrix}$ על W. (7 נק')

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

<u>שאלה 3</u>:תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך A הפיכה וכך שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $||Av|| = ||Bv||$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (8 נק' לסעיף)

1. B הפיכה.
2. A, B אוניטריות.
3. AB^{-1} אוניטרית.

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

שאלה 4: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש A^tA היא מטריצה סקלרית, כלומר, קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש $A^tA = aI$.

1. הוכיחו כי אם $a = 0$ אזי $A = 0$. (5 נק')
2. הוכיחו כי אם $a \neq 0$ אזי $a > 0$. (5 נק')
3. הוכיחו כי לכל a קיים $b \in \mathbb{R}$ ומטריצה או"ג Q כך ש $A = bQ$. (12 נק')

פתרון שאלה 4:

פתרון שאלה 4 (המשך)

פתרון שאלה 4 (המשך)

פתרון שאלה 4 (המשך)

<u>שאלה 5: אין קשר בין הסעיפים הבאים:</u>

1. יהי $n \geq 2$ ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת ש $tr(A) = 0$, $rank(A) = 1$. מהם <u>הפולינום האופייני</u> ו<u>הפולינום המינימלי של A</u>? (10 נק)

2. (10 נק) יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $U \leq V$ ת"מ. נגדיר את הקבוצה:

$$U^0 = \{T : V \longrightarrow \mathbb{F} \mid \forall u \in U \ T(u) = 0\}$$

הוכיחו כי לכל $T \in U^0$ קיים $w \in U^{\perp}$ כך ש

$$\forall v \in V: \ T(v) = \langle v, w\rangle$$

3. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, ויהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $T + T^* = TT^*$. הוכיחו כי T ניתן ללכסון. (10 נק)
(רמז בשווי 3 נק' מתוך הסעיף: נסו תחילה להוכיח כי $I - T$ אוניטרי).

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 5 (המשך)

פתרון שאלה 5 (המשך)

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___