מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ג מועד ב'

13.9.2023

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: ראם וקסמן, רועי חסון, אלכסנדר טולסניקוב, כנה נהיר, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 107. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

שאלה 1. (27 נק') תהי

$$.A=\begin{pmatrix}0&-3&1&1\\-1&-2&0&1\\-1&1&-1&0\\-9&0&-1&3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל-$C(A)$ ול-$N(A)$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$C(A)+N(A)$ ול-$C(A)\cap N(A)$.

ג. הוכיחו כי העמודה הרביעית של A^2 היא עמודת אפסים.

פתרון.

א. נדרג את המטריצה לצורה מדורגת קנונית:

$$\begin{pmatrix}0&-3&1&1\\-1&-2&0&1\\-1&1&-1&0\\-9&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\0&-3&1&1\\-1&1&-1&0\\-9&0&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-9R_1]{R_3\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\0&-3&1&1\\0&3&-1&-1\\0&18&-1&-6\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4+6R_2]{R_3\leftarrow R_3+R_2}\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\0&-3&1&1\\0&0&0&0\\0&0&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\0&-3&1&1\\0&0&5&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow\frac{1}{5}R_3}\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\0&-3&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_3}\begin{pmatrix}-1&-2&0&1\\0&-3&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow[R_2\leftarrow-\frac{1}{3}R_2]{R_1\leftarrow-R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

יש איברים מובילים בשלוש העמודות הראשונות, לכן בסיס למרחב העמודות הוא $\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$,

והמימד הוא 3.

עבור מרחב האפס, נמצא פתרון כללי למערכת. נסמן $w=t$, ונקבל $x=\frac{1}{3}t$, $y=\frac{1}{3}t$, $z=0$. לכן הפתרון הכללי הוא

$$.\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t\\\frac{1}{3}t\\0\\t\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

זה מראה ש-$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $N(A)$, והמימד הוא 1.

ב. נתחיל מהסכום. כדי למצוא בסיס ל-$C(A)+N(A)$, צריך לקחת את הבסיסים של $C(A)$ ושל $N(A)$, לשים בעמודות מטריצה ולדרג למציאת תלויות לינאריות. אם נשים אותם בעמודות מטריצה נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix}0&-3&1&1\\-1&-2&0&1\\-1&1&-1&0\\-9&0&-1&3\end{pmatrix}$$

שהיא המטריצה A המקורית. כבר דירגנו אותה, ולכן אנחנו יודעים ששלושת העמודות הראשונות הן בסיס ל-$C(A)+N(A)$. בפרט, זה מראה ש-$C(A)+N(A)=C(A)$, או במילים אחרות $N(A)\subseteq C(A)$. לכן:

- $C(A)+N(A)=C(A)$, לכן המימד הוא 3 והבסיס הוא אותו בסיס של $C(A)$.
- $C(A)\cap N(A)=N(A)$, לכן המימד הוא 1 והבסיס הוא אותו בסיס של $N(A)$.

ג. לפי מה שראינו, העמודה הרביעית של A נמצאת במרחב האפס של A. ניעזר בכפל לפי עמודות, ונקבל $C_4(A^2)=A\cdot C_4(A)=0$. לכן ב-A^2 יש עמודת אפסים, שהיא העמודה הרביעית.
(אפשר גם כמובן לחשב את העמודה ולראות כי מדובר בעמודת אפסים).

שאלה 2. (20 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ בסיס של V. נגדיר תת־קבוצה $W\subseteq V$ באופן הבא: $w\in W$ אם הווקטורים $v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4,w$ ת"ל.

א. הוכיחו כי הווקטורים v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4 בת"ל.

ב. הוכיחו כי W היא תת־מרחב וקטורי של V, ומצאו בסיס ומימד של W.

פתרון.

א. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_2+v_3)+\gamma(v_3+v_4)=0$$

נקבץ לפי איברי הבסיס המקורי ונקבל

$$\alpha v_1+(\alpha+\beta)v_2+(\beta+\gamma)v_3+\gamma v_4=0.$$

כיוון ש-B בסיס של V, הווקטורים v_1,v_2,v_3,v_4 בת"ל, ולכן

$$\alpha=\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma=0$$

ומכאן נקבל $\alpha=\beta=\gamma=0$. לכן v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4 בת"ל.

ב. הוכחנו בהרצאה את הטענה הבאה: אם S בת"ל, ו-$v\notin S$, אז $S\cup\{v\}$ ת"ל אם ורק אם $v\in\operatorname{Span}(S)$. לכן הווקטורים $v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4,w$ ת"ל אם ורק אם $w\in\operatorname{Span}\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4\}$, כלומר נקבל $W=\operatorname{Span}\{v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4\}$.
הראינו שהווקטורים v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4 בת"ל בסעיף הקודם, והם פורשים את W לפי ההגדרה. לכן הם בסיס של W, ונקבל $\dim W=3$.

שאלה 3. (24 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 מעל $\mathbb{R}$, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ בסיס סדור של V. לכל $a\in\mathbb{R}$, תהי $T_a\colon V\to V$ העתקה לינארית המקיימת

$$[T_a]_B^B=\begin{pmatrix}1&a&0&a-2\\a&a^2+a-2&a-4&-a-2\\a+1&a^2+a&a-2&-2\\0&a-2&a-4&a-2\end{pmatrix}$$

א. מצאו את כל ערכי הפרמטר $a\in\mathbb{R}$ שעבורם ההעתקה T_a היא חח"ע.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$\ker T_0$ ול-$\operatorname{Im} T_0$ (כאשר T_0 היא ההעתקה T_a עבור $a=0$).

ג. הוכיחו כי $C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big)=N\big([T_2]_B^B\big)$ (כאשר T_2 היא ההעתקה T_a עבור $a=2$).

פתרון.

א. כזכור, העתקה לינארית היא חח"ע אם ורק אם הגרעין שלה הוא מרחב האפס, אם ורק אם אוסף הפתרונות של המטריצה המייצגת שלה הוא מרחב האפס. נדרג את המטריצה המייצגת:

$$\begin{pmatrix}1&a&0&a-2\\a&a^2+a-2&a-4&-a-2\\a+1&a^2+a&a-2&-2\\0&a-2&a-4&a-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-(a+1)R_1]{R_2\leftarrow R_2-aR_1}\begin{pmatrix}1&a&0&a-2\\0&a-2&a-4&-a^2+a-2\\0&0&a-2&-a^2+a\\0&a-2&a-4&a-2\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_2}\begin{pmatrix}1&a&0&a-2\\0&a-2&a-4&-a^2+a-2\\0&0&a-2&-a^2+a\\0&0&0&a^2\end{pmatrix}$$

לכן כל עוד $a \neq 0,2$, המטריצה המייצגת הפיכה, ולכן ההעתקה הלינארית T_a תהיה חח"ע. אם $a = 0,2$ אז מרחב האפס של $\left[T_a\right]_B^B$ לא טריוויאלי, ולכן גם הגרעין של T_a אינו טריוויאלי.

ב. נציב $a = 0$ ונדרג את המטריצה לצורה מדורגת קנונית (מותר להמשיך מאיפה שעצרנו כי כל הפעולות של הדירוג עד כה היו חוקיות):

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&-2&-4&-2\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{2}R_3]{R_2\leftarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_3} \begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

לחישוב הגרעין: הפתרון הכללי של המערכת המתאימה למטריצה הוא $t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\-t\\0\\t\end{pmatrix}$, לכן $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$N\big(\left[T_0\right]_B^B\big)$. נמיר חזרה למרחב V ונקבל ש-$\{2v_1 - v_2 + v_4\}$ בסיס ל-$\ker T_0$, והממד הוא 1.

לחישוב התמונה: בשלוש העמודות הראשונות של הצורה המדורגת יש איבר מוביל, לכן שלוש העמודות הראשונות של $\left[T_0\right]_B^B$ הן בסיס ל-$C\big(\left[T_0\right]_B^B\big)$, כלומר $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\-2\\-4\end{pmatrix}\right\}$. נמיר חזרה למרחב V ונקבל שהקבוצה $\{v_1+v_3, -2v_2-2v_4, -4v_2-2v_3-4v_4\}$ בסיס של $\operatorname{Im} T$, והממד הוא 3.

ג. לפי משפט מההרצאה, $[T_2]_B^B \cdot \operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right) = 0$. לפי כפל עמודות נקבל שלכל j מתקיים $[T_2]_B^B \cdot C_j\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = C_j\big([T_2]_B^B \cdot \operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = 0$, כלומר כל עמודה של $\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)$ נמצאת במרחב האפס של $[T_2]_B^B$. נחשב אותו, על ידי הצבת $a = 2$ ודירוג המטריצה המייצגת (שוב, מהשלב האחרון של הדירוג הכללי):

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&-2&-4\\0&0&0&-2\\0&0&0&4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{2}R_3]{R_2\leftarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-4R_3]{R_2\leftarrow R_2-2R_3} \begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן בסיס למרחב האפס הוא $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, והממד הוא 1.

הסברנו מדוע $C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) \subseteq N\big([T_2]_B^B\big)$. כיוון ש-$\dim N\big([T_2]_B^B\big) = 1$, יש שתי אפשרויות ל-$\dim C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big)$:

- אם $\dim C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = 0$, אז $C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = 0$, כלומר $\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right) = 0$.
- אם $\dim C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = 1$, אז מהכלה ושוויון מימדים נקבל $C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = N\big([T_2]_B^B\big)$.

נותר להסביר מדוע $\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right) \neq 0$. נציג שתי דרכים לעשות זאת:

<u>דרך 1: חישוב ישיר.</u> ראשית, אם נציב $a = 2$ נקבל

$$\left[T_a\right]_B^B = \begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&4&-2&-4\\3&6&0&-2\\0&0&-2&0\end{pmatrix}.$$

כדי להראות שמטריצה שונה מאפס מספיק לחשב את אחד האיברים שלה. למשל:

$$\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big)_{1,1} = (-1)^{1+1}\cdot \det M_{1,1} = \det\begin{pmatrix}4&-2&-4\\6&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{שורה } 3}{=} (-1)\cdot(-2)\cdot\det\begin{pmatrix}4&-4\\6&-2\end{pmatrix} = 2\cdot(4\cdot(-2)-(-4)\cdot 6) = 32 \neq 0$$

לכן מתקיים $\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right) \neq 0$.
דרך 2: הסבר תיאורטי. נשים לב שהדרגה של $[T_2]_B^B$ היא 3 (כי בצורה המדורגת שלה יש 3 איברים מובילים), ולמעשה שלוש העמודות הראשונות שלה בת"ל. לכן, אם נמחק מהמטריצה את העמודה הרביעית שלה, נישאר עם מטריצה מגודל 3×4 מדרגה 3. אבל דרגת השורות שווה לדרגת העמודות, לכן יש בה 3 שורות בת"ל, ואפשר למחוק שורה מהמטריצה כדי לקבל מטריצה הפיכה, שהיא מינור של $[T_2]_B^B$. זה מראה שיש איזשהו מינור ב-$[T_2]_B^B$ שהוא מטריצה הפיכה, ולכן $\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right) \neq 0$.
בסך הכל נקבל $C\big(\operatorname{adj}\left([T_2]_B^B\right)\big) = N\big([T_2]_B^B\big)$.

שאלה 4. (18 נק') יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהי $n \geq 2$.

א. תנו דוגמה למטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שונות מאפס כך שלכל מטריצה $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $\det(A+BC) \neq 1$.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שונות מאפס קיימות $C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שעבורן $\det(A+DBC) \neq 0$.

(שימו לב: בשני הסעיפים, המטריצות A, B שתיהן שונות ממטריצת האפס.)

פתרון.

א. כל דוגמה שבה $A = B$ היא מטריצה לא הפיכה ושונה מאפס תעבוד.
למשל, אפשר לקחת $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. לכל מטריצה C שנבחר, נקבל $A+BC = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (כלומר השורה והשנייה והעמודה השנייה יהיו אפסים), ולכן לכל מטריצה C נקבל $\det(A+BC) = 0$.

ב. הפרכה. ניקח $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. נשים לב ש-$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 1$. לכל זוג מטריצות $C, D \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ נקבל $\operatorname{rank}(DBC) \leq \operatorname{rank}(B) = 1$. כמו כן,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+DBC) &= \dim R(A+DBC) \overset{(1)}{\leq} \dim(R(A)+R(DBC)) \overset{(2)}{\leq} \dim R(A) + \dim R(DBC) \\ &= \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(DBC) = 1+1 = 2\end{aligned}$$

כאשר: המעבר (1) מתבסס על כך ש-$R(A+DBC) \subseteq R(A)+R(DBC)$ כי כל שורה של $A+DBC$ היא סכום של שורה של A ושורה של DBC; המעבר (2) מתבסס על משפט המימדים. בסך הכל המטריצה $A+DBC$ לעולם אינה הפיכה, ולכן לא ייתכן $\det(A+DBC) \neq 0$.

שאלה 5. (18 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $U, W \leq V$ תת־מרחבים כך ש-$W \subseteq U$.

א. הוכיחו: קיימת העתקה לינארית $T\colon V \to V$ שעבורה $\operatorname{Im} T = U$ ו-$\operatorname{Im} T^2 = U$.

ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת העתקה לינארית $T\colon V \to V$ שעבורה $\operatorname{Im} T = U$ ו-$\operatorname{Im} T^2 = W$.

פתרון.

א. יהי $\{u_1, \ldots, u_k\}$ בסיס של U. נשלים אותו לבסיס $B = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_n\}$ של V. תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $Tu_i = u_i$ לכל $1 \leq i \leq k$ ו-$Tv_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$. העתקה לינארית כזו קיימת לפי משפט ההגדרה. לפי טענה מההרצאה, כיוון ש-B בסיס של V, נקבל ש-

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{Tu_1, \ldots, Tu_k, Tv_1, \ldots, Tv_n\} = \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_k, 0 \ldots, 0\} = U$$

וכן

$$\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Span}\left\{T^2u_1, \ldots, T^2u_k, T^2v_1, \ldots, T^2v_n\right\} = \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_k, 0 \ldots, 0\} = U.$$

ב. הפרכה. אפשר למשל לבחור $U = V = \mathbb{R}^2$ ו-$W = \{0\}$. אם $T\colon V \to V$ העתקה לינארית כך ש-$\operatorname{Im} T = U = \mathbb{R}^2$, אז T על, ולכן גם T^2 היא על, כלומר $\operatorname{Im} T^2 = \mathbb{R}^2 \neq W$.