תרגיל מס' 1 עלה לאתר $xi.math-wiki.com$
להירשם באמצעות חשבון ג'ימייל.
אחרי ההרשמה- להירשם לקורס "אלגברה לינארית לביולוגים, תשפ"א, 89119 ".
תרגיל ראשון: פתרו את המערכת הבאה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

כלומר, עליכם להכריע האם יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/ אין פתרון.
במידה ויש פתרון יחיד- למצוא אותו.
במידה ויש אינסוף פתרונות- לכתוב את הקבוצה של כל הפתרונות (כל הוקטורים מצורה מסויימת).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -0.2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1-3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד, כי: אין שורת סתירה. וכן, בכל עמודה יש איבר מוביל, ולכן כל המשתנים תלויים (אין משתנים חופשיים).
הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix} -0.6 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

הגענו לשורת סתירה, לכן אין צורך להמשיך. למערכת אין פתרון.
תזכורת לאלגוריתם הדירוג של גאוס:

עוברים עמודה עמודה. בעמודה הראשונה רוצים שיהיה איבר מוביל בשורה הראשונה. אחרי שיש איבר מוביל, מאפסים את שאר העמודה.

עוברים לעמודה השניה. דואגים שיהיה איבר מוביל בשורה השניה. ואז מאפסים את שאר העמודה השניה.

ואז עוברים לעמודה הבאה וכו'.

כמובן שזה רק "בגדול". יש מצבים שיש עמודות שאין בהן איבר מוביל. אז עוברים לעמודה הבאה. או שיש שורות בלי איבר מוביל- מחליפים שורות כדי שיהיו בתחתית המטריצה.

תרגיל נוסף: נתנה המערכת הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right)$$

מצאו לאילו ערכי a למערכת יש פתרון יחיד. לאילו ערכי a אין פתרון, ולאילו ערכי a יש אינסוף פתרונות.

איך נפתור?

נתחיל לדרג בצורה רגילה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{1-a} R_3}$$

הפעולה האחרונה שעשינו היא חוקית רק כאשר $a \neq 1$.

נניח ש$a \neq 1$ ונמשיך בפעולות הדירוג.

בסוף התרגיל נצטרך לבדוק בנפרד את המקרה שבו $a = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{1-a} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1+a & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - aR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (1+a)R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{a+2} R_3}$$

הפעולה האחרונה חוקית רק כאשר $a \neq -2$.

אז נניח ש$a \neq 1, -2$ ונמשיך לדרג.

ובסוף נצטרך לבדוק גם את המקרה $a = -2$ בנפרד.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - (1+a)R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-(a+1)\frac{a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a+2} \end{array}\right)$$

מסקנות לבינתיים: אם $a \neq 1, -2$ למערכת יש פתרון יחיד. אנחנו אפילו יודעים מי הפתרון.

$$\left(\begin{array}{c} a-(a+1)\frac{a}{a+2} \\ \frac{a}{a+2} \\ \frac{a}{a+2} \end{array}\right)$$

כעת נבדוק מה קורה כאשר $a = 1$.

אין צורך להציב $a = 1$ כבר במערכת המקורית, כי הפעולות הראשונות שעשינו חוקיות גם עבור $a = 1$. לכן נציב $a = 1$ במערכת האחרונה שהגענו אליה, לפני שהיינו צריכים להשתמש בהנחה ש$a \neq 1$. זאת הפעם האחרונה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

עכשיו נציב $a = 1$. נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת יש אינסוף פתרונות, כי: אין שורת סתירה. ובנוסף יש משתנים חופשיים.

למערכת יש שני משתנים חופשיים, המשתנים השני והשלישי, כי בעמודות שלהם אין איבר מוביל.

נניח שהמשתנים הם x, y, z.

נציב $y = t, z = s$

נקבל ש$x = 1 - t - s$

כלומר, הפתרונות של המערכת זה:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1-t-s \\ t \\ s \end{array}\right) : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

נציב $a = -2$. במטריצה האחרונה אליה הגענו לפני שהנחנו ש$a \neq -2$. המטריצה הזאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & a \end{array}\right)$$

נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה. אין פתרון.
לסיכום:
עבור $a=-2$ למערכת אין פתרון.
עבור $a=1$ למערכת יש אינסוף פתרונות ומצאנו אותם.
עבור $a\neq 1,-2$ למערכת יש פתרון יחיד, ומצאנו אותו כביטוי עם a.

מטריצות

הגדרה: מטריצה היא טבלה של מספרים. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

בד"כ נסמן מטריצות באותיות אנגליות גדולות A,B.
יש שני דברים שמאפיינים מטריצה:
1. בגדלים שלה- מספר השורות ומספר העמודות. אם לA יש m שורות וn עמודות, אז נכתוב $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$
למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

2. הרכיבים שלה. כלומר, מי המספר שנמצא בכל מיקום. את המיקומים מסמנים לפי השורה והעמודה, באופן הבא:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2}=2$$

$$A_{2,2}=3$$

$$A_{2,1}=4$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,2}=2$$

$$A_{2,3} = 6$$

ניתן גם "לבודד" שורות ועמודות של מטריצה. שורות מסמנים בR ועמודות בC

$$R_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

הערה: וקטורי שורה ועמודה הם גם מטריצות בעצמם. מטריצות עם שורה אחת (וקטורי שורה) או עם עמודה אחץ (וקטורי עמודה).

פעולות על מטריצות:

1. כפל של מטריצה בסקלר. נניח A מטריצה, וα סקלר, אז αA היא מטריצה חדשה. שמוגדרת ככה: מספר השורות והעמודות שלה שווה למספר השורות והעמודות של A.

$$\forall i,j : (\alpha A)_{i,j} = \alpha(A_{i,j})$$

לדוגמא:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. חיבור מטריצות:

אפשר לחבר רק שתי מטריצות באותו גודל (אותו מספר שורות ואותו מספר עמודות). החיבור הוא רכיב-רכיב.

בכתיב פורמלי: אם $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אז $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ולכל i, j:

$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

3. כפל מטריצות:

שלב ראשון: נלמד להכפיל בין וקטורי שורה ועמודה. אפשר להכפיל וקטור שורה בוקטור עמודה רק אם יש להם את אותו מספר רכיבים.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

הכפל יוצא מספר.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{array}\right) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 5 + 5\cdot(-2) = -13$$

שלב שני: ניתן להכפיל מטריצות A, B , ולקבל $A \cdot B$,רק אם מתקיים התנאי הבא: מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B.

כלומר, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$

המטריצה המתקבלת $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$

לדוגמא: $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}, B \in \mathbb{R}^{4\times 2}, C \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

$$AB \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$BA - not$$

$$AC \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$CA \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$$BC - not$$

$$CB - not$$

הערה: כפל מטריצות הוא תלוי בכיוון. כלומר, ייתכן שאפשר להכפיל AB אבל אי אפשר להכפיל BA.

בנוסף, ייתכן שהכפל מוגדר בשני הכיוונים אבל יוצאות מטריצות בגדלים שונים.

איך מחשבים? נניח שAB מוגדר. אמרנו כבר מה יהיה הגודל של AB. נותר להגיד מה יהיו הרכיבים. הרכיב במקום i, j שווה לשורה הi של A כפול העמודה הj של המטריצה B.

$$(AB)_{i,j} = R_i(A)\cdot C_j(B)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 4 & 8 \\ 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$(AB)_{1,1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right) = 0 + 3 + 1 = 4$$

$$(AB)_{1,2} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 2 \end{array}\right) = 8$$

$$(AB)_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$(AB)_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$