שיפור דיוק איטרטיבי

סביר שהפתרון שנקבל למערכת משוואות הוא לא הפתרון המדויק. יש טכניקות איטרטיביות לשפר את התוצאה.

אם $A\underline{x}=\underline{b}$, וקיבלנו פתרון מקורב $\underline{\overline{x}}$, אזי וקטור השגיאה הוא $\underline{e}=\underline{x}-\underline{\overline{x}}$.

$$\underline{r}=A\underline{\overline{x}}-\underline{b}$$

$$A\underline{e}=\underline{r}$$

כלומר: יש לנו $\underline{\overline{x}}$, לכן ניתן למצוא את $A\underline{\overline{x}}$, ומכאן ניתן למצוא את $r=A\underline{x}-A\underline{\overline{x}}$(כי $A\underline{x}=b$, וb נתון לנו).

מתקיים $A\underline{e}=\underline{r}$, כאשר $A,\underline{r}$ ידועים, ולכן ניתן לחלץ את $\underline{e}$, ומשם לקבל לקבל קירוב יותר טוב ל$\underline{x}$, כי $\underline{x}=\underline{\overline{x}}+\underline{e}$.

קל לחלץ את $\underline{e}$, כי כבר ביצענו ואריאציה כלשהי של שיטת גאוס(למשל פירוק LU) שמאפשרת לנו לפתור מערכות עם המטריצה A בצורה מהירה.

שיטת Jacobi

הגדרה

מערכת משוואת נקראת "שולטת אלכסונית"(diagonally dominant) אם ניתן לסדרה כך שאיבר האלכסון גדול מסכום שאר האלמנטים בשורה(לכל איבר האלכסון).

השיטה

דומה מאוד לfixed point iteration, אבל הפעם יש לנו מטריצות:

$$\underline{x}^{(n+1)}=\varsigma\left(\underline{x}^{(n)}\right)=\underline{b}'-B\underline{x}^{(n)}$$

כאשר

$$A=L+D+U$$

$$L=\begin{pmatrix}0&0&0\\ *&0&0\\ *&*&0\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}0&*&*\\ 0&0&*\\ 0&0&*\end{pmatrix}\qquad D\begin{pmatrix}*&0&0\\ 0&*&0\\ 0&0&*\end{pmatrix}$$

$$A\underline{x}=(L+D+U)\,\underline{x}=\underline{b}$$

$$D\underline{x}=-\left(L+U\right)\underline{x}+\underline{b}$$

$$\underline{x}=-D^{-1}\left(L+U\right)\underline{x}+D^{-1}\underline{b}$$

ואז, האיטרציה היא:

$$\boxed{\underline{x}^{(n+1)} = \underbrace{-D^{-1}\left(L+U\right)}_{B}\underline{x}^{(n)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{b}'}}$$

כאשר

$$\underline{b}' = D^{-1}\underline{b} \qquad B = D^{-1}\left(L+B\right)$$

הצדקת ההתכנסות - Atkinson עמודים 476-472

אינטרפולציה(Interpolation) והתאמת עקומים

הרעיון הוא שנתונות לנו דגימות של פונקציה לא ידועה, ואנו צריכים למצוא את הפונקציה המקורית.

יש לנו קבוצה של פונקציות שממנה אנו צריכים להרכיב את הפונקציה שלנו. תיאורטית זה אפשרי עם הרבה סוגים של פונקציות, אבל משתמשים בפולינומים, כי יש להם תכונות מאוד נוחות.

אינטרפולציה ע"י פולינומים

נתונים מספרים ממשיים(או מדומים) שונים $x_0, x_1, \ldots x_n$ והערכים של פונקציה $f\left(x\right)$(לא ידועה) עבור אותם x_i - $f_0, f_1, \ldots f_n$. רוצים למצוא פולינום $p\left(x\right)$ המקיים

$$p\left(x_i\right) = f_i \qquad i = 0, 1, \ldots n$$

הערה: בניגוד לאפרוקסימציה(קירוב), שבה מחפשים קו ישר שיעבור קרוב לכל הנקודות, כאשר צריך שהפולינום יעבור דרך כל נקודה ונקודה מהדגימות.

נניח כי הפולינום המבוקש הוא מהצורה

$$p\left(x\right) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

כלומר יש למצוא $\left(m+1\right)$ מקדמים(או נעלמים).

יש לנו $n+1$ אילוצים, ולכן יש לנו $n+1$ משוואות, ולכן $m = n$. הנעלמים של הבעיה הם המקדמים a_i:

$$p\left(x_0\right) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n$$

$$p\left(x_1\right) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n$$

$$\vdots$$

$$P\left(x_n\right) = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n$$

שוב ־ ערכי x_i ידועים לנו, והנעלמים הם a_i. למרות שהפולינום עצמו לא לינארי(הוא ממעלה n), מערכת המשוואות שקיבלנו כאן היא לינארית.

אפשר לכתוב את זה בכתיב מטריצי:

$$X\underline{a} = \underline{f}$$

X היא מטריצת Vandermonde הידועה(לשמצה):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \left(x_i^j\right)$$

צריך לפתור

$$X\underline{a} = \underline{f} \Rightarrow \underline{a} = X^{-1}\underline{f}$$

האם יש לX מטריצה הופכית? מכיוון שX היא מטריצת ונדרמונדה, אפשר למצוא לה הופכי. תנאי הכרחי שתהייה לה הופכי היא שהxים שונים ־ אם יש שני xים זהים, אז יש לנו שתי שורות זהות במטריצה ומגיעים לסינגולריות[1].

ספציפית, לגבי מטריצת וונדרמונדה, מתקיים

$$\det\left(X\right) = \prod_{0\leq j<i\leq n}\left(x_i - x_j\right)$$

ולכן $\det\left(X\right) \neq 0$ עבור x_i שונים, ומובטח לנו שיהיה הופכי.

פולינומי לגרנז'(Lagrange)

זוהי שיטת אינטרפולציה אלטרנטיבית שמסתכלת על $n+1$ מקרים פרטיים, ולכל אחד מהמקרים מתאימה פונקציה משלו.

מגדירים פולינום לגרנז' $l_i\left(x\right)$ שכל אחד מהם הוא פתרון עבור תת בעיה:

$$l_i\left(x\right) = c\left(x - x_0\right)\cdots\left(x - x_{i-1}\right)\left(x - x_{i+1}\right)\cdots\left(x - x_n\right)$$

מבניית הפולינום מקבלים שלכל $i \neq j$, $f_i\left(x_j\right) = 0$. כמו כן דורשים שעבור קבוע c מסויים, $f_i\left(x_i\right) = 1$, ולכן

$$c = \frac{1}{\left(x_i - x_0\right)\cdots\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)\cdots\left(x_i - x_n\right)}$$

[1]למרות שבמקרה הזה, אפשר פשוט לוותר על נקודה. אבל בצורה שניסחנו את זה מגיעים לסינגולריות.

ולכן ניתן לכתוב

$$l_i\left(x\right)=\prod_{j\neq i}\frac{\left(x-x_j\right)}{\left(x_i-x_j\right)}$$

עכשיו, הפתרון למערכת הוא

$$p\left(x\right)=\sum l_i\left(x\right)f_i=f_0l_0\left(x\right)+f_1l_1\left(x\right)+\cdots+f_nl_n\left(x\right)$$

ואז, לכל j,

$$p\left(x_j\right)=f_0\underbrace{l_0\left(x_j\right)}_{=0}+\cdots+f_{j-1}\underbrace{l_{j-1}\left(x_j\right)}_{=0}+f_j\underbrace{l_j\left(x_j\right)}_{=1}+f_{j+1}\underbrace{l_{j+1}\left(x_j\right)}_{=0}+\cdots+f_n\underbrace{l_n\left(x_n\right)}_{=0}=f_j$$

יחידות הפתרון

הפולינום $p\left(x\right)$ אחד ויחיד.

הוכחה

נניח בשלילה שקיים פולינום נוסף q ממעלה קטנה או שווה לp המקיים את התנאים. נגדיר $r\left(x\right)=p\left(x\right)-q\left(x\right)$. ברור ש$\deg r\leq n$. מתקיים $r\left(x_i\right)=p\left(x_i\right)-q\left(x_i\right)=0$ ־ כלומר r מתאפס ב$n+1$ נקודות. אבל פולינום מדרגה קטנה או שווה לn מתאפס ב$n+1$ מקומות. לפי המשפט היסודי של האלגברה, זה ייתכן רק אם $r\equiv 0$ ־ ולכן $q\left(x\right)\equiv p\left(x\right)$.