מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' דוד סרנה
תאריך: 2015-11-08

קבלת החלטות בסביבה דינמית משתנה
89-514-01

בעיית המזכירה

הופיעה באמצע המאה הקודמת, ידועה גם בתור "בעיית הנישואין" או "בעיית המוהר".

הבעיה:

- אנחנו רוצים למלא תפקיד של מזכירה
- יש הרבה מועמדים/ות שמספרם ידוע
- נמיין את המועמדים בסדר אקראי ונלמד מהו הדירוג היחסי של המועמד החדש שראיינו ביחס למועמדים שראיינו עד כה[1]
- אנחנו צריכים להחליט אם לקבל או לדחות את המרואיין על בסיס הדירוג היחסי שלו בלבד, באופן מיידי, לפני שמראיינים עוד מרואיינים
- ברגע שדוחים מרואיין, אי אפשר לדחות אותו
- יש לנו תועלת רק אם שכרנו את הטוב ביותר

נשים ♡: אין לנו אפשרות לבחור את ההכי טוב - אם למשל ההכי טוב היה הראשון שראיינו אין לנו למה להשוות

אסטרטגיה פרמטרית

נבחר מספר r, ונזרוק אוטומטית את ה$r-1$ הראשונים שנראיין. אחרי זה ניקח את הראשון שיותר טוב מכל הקודמים

נשים לב שלא יכול להיות כלל החלטה יותר טוב, שכן אנחנו לא לומדים שום דבר חדש על כלל האוכלוסיה לאחר כל ראיון.

ניתוח

מה ההסתברות $\phi_n(r)$ לבחירת המועמד הכי טוב?

- עבור $r=1$ או $r=n$ - $\phi_n(r)=\frac{1}{n}$
- עבור $1<r<n$:

$$\phi_n(r)=\sum_{j=r}^{n}P\left(\begin{array}{c}j\text{-th applicant is best}\\ \text{and you select it}\end{array}\right)=\sum_{j=r}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{r-1}{j-1}\right)=\left(\frac{r-1}{n}\right)\sum_{j=r}^{n}\left(\frac{1}{j-1}\right)$$

כלומר, נבדוק את הסיכוי לכל j שגם:

– j הכי טוב - ההסתברות היא $\frac{1}{n}$
– אף אחד מ לפני j לא היה הכי טוב - ההסתברות היא $\frac{r-1}{j-1}$

נשים לב - זהו בעצם קירוב האינטגרל של רימן! נגזור

$$\phi_n(r)=-x\log(x)$$

$$\phi'_n(r)=-\log(x)-1=0$$

$$\log(x)=-1$$

$$x=\frac{1}{e}\approx 0.367879$$

---

[1] נשים לב - יש לנו כאן סולם אורדינלי, בניגוד לסולם האבסולוטי שיש לנו בדרך כלל

ואם נחליף ב$\phi_n(r)$:

$$\phi_n(r) = -\left(\frac{1}{e}\right)\log\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

כלומר כדאי לחכות עד שנעבור 37% מהמועמדים ואז לבחור את המועמד הראשון שטוב יותר מכל הקודמים לו.

ערך מידע חדש(המשך)

ערך מידע מושלם

ערך מידע מושלם הוא ההפרש בין הרווח בודאות מוחלטת לבין הרווח במצב של אי ודאות.

הגדרה פורמלית

מידע נחשב "מושלם"(Perfect) אם הוא תמיד נכון.

לדוגמה - שוקלים להשקיע בחברה, ורוצים לדעת לפני אם מדד תל־אביב 25 יעלה, והולכים בשביל זה למגיד עתידות. נסמן בA את המאורע שהמדד יעלה ובA' את המאורע שמגיע העתידות ינבא שהוא יעלה.

אם מגיד העתידות תמיד חזוה נכונה את מצב המדד, הרי:

$$\Pr(A'|A) = 1 \iff \Pr\left(\overline{A'}|A\right) = 0$$

מה לגבי $\Pr(A|A')$(למשל מה אם $P(A) = 0.4$)?

$$\Pr(A|A') = \frac{\Pr(A'|A)\Pr(A)}{\Pr(A'|A)\Pr(A) + \Pr\left(A'|\overline{A}\right)\Pr\left(\overline{A}\right)} = \frac{1\cdot\Pr(A)}{1\cdot\Pr(A) + 0\cdot\Pr\left(\overline{A}\right)} = 1$$

כלומר, במידע מושלם, ההסתברות $\Pr(A|A')$ היא 1 ללא קשר להסתברות $\Pr(A)$

כמובן, $\Pr\left(\overline{A}|\overline{A'}\right) = 1$

תוחלת מידע מושלם

למשקיע קיימות 3 אלטרנטיבות:

- חשבון חיסכון שמשלם ריבית של 500$
- מניה בסיכון גבוה או נמוך - צריך לשלם עמלת ברוקר 200$
  - אם השוק יעלה, מניה בסיכון גבוה תניב 1700$ ובסיכון נמוך 1200$
  - אם השוק ישאר אותו דבר, מניה בסיכון גבוה תניב 300$ ובסיכון נמוך 400$
  - אם השוק ירד, מניה בסיכון גבוה תפסיד 800$ ובסיכון נמוך תרוויח 100$(שזה עדיין הפסד כי שילמנו 200$ עמלת ברוקר)

רוצים להחליט מה לעשות - בשביל זה נעשה עץ החלטה ונקפל אותו. תוחלת התמורה שלנו אחרי הקיפול תהיה 580$

אבל - מה אם אנחנו יכולים לקבל מידע מושלם(כלכלנים יודעים לטעות, אז נלך למגיד עתידות). אז ההחלטה תהיה קלה - אם נדע שהשוק יעלה נשקיע במנייה בסיכון גבוה, ואם לא נשקיע בחשבון חיסכון. תוחלת הסיכון במקרה כזה היא 1000$. לכן ערך המידע המושלם הוא:

$$EMV = 1000 - 580 = 420$$

נשים ♡: אי אפשר להגיד שלאחר המידע המושלם נבחר בערך הכי גבוה - כי אנחנו לא יודעים מראש מה המידע המושלם הולך להיות. אם היינו יודעים מה המידע המושלם הולך להיות לא היינו משלמים עליו.

לרוב המידע שאנו מקבלים אינו מושלם

אם לא הולכים למגיד עתידות, המידע שאנח מקבלים הוא לא מושלם - יש אפשרות שהוא שגוי:

$$\Pr\left(A'|A\right)<1 \iff \Pr\left(\overline{A'}|A\right)>0 \qquad \Pr\left(\overline{A'}|\overline{A}\right)<1 \iff \Pr\left(A'|\overline{A}\right)>0$$

במקרה הזה, מצב השוק משפיע גם על תחזית הכלכלן וגם על הרווח - בניגוד למידע מושלם שבו התחזית זהה למצב הטבע. נשים גם לב שהתחזית לא משפיעה על הרווח ישירות - בהינתן החלטה ומצב שוק הרווח קבוע בלי קשר לתחזית

דוגמה להערכה שהכלכלן נותן:

(Estimation) E	Up	Flat	Down
"Up"	$\Pr\left(\text{"Up"}\mid\text{Up}\right)=0.80$	$\Pr\left(\text{"Up"}\mid\text{Flat}\right)=0.15$	$\Pr\left(\text{"Up"}\mid\text{Down}\right)=0.20$
"Flat"	$\Pr\left(\text{"Flat"}\mid\text{Up}\right)=0.10$	$\Pr\left(\text{"Flat"}\mid\text{Flat}\right)=0.70$	$\Pr\left(\text{"Flat"}\mid\text{Down}\right)=0.20$
"Down"	$\Pr\left(\text{"Down"}\mid\text{Up}\right)=0.10$	$\Pr\left(\text{"Down"}\mid\text{Flat}\right)=0.15$	$\Pr\left(\text{"Down"}\mid\text{Down}\right)=0.80$

נשים לב שרק העמודות צריכות להסתכם ל1 - שורות לא צריכות כי הן מדברות על הסתברויות בהינתן מאורעות שונים.

סיכום - ערך מידע חדש

- שאלת הבסיס - מהו הערך ללא אינפורמציה
- מידע מושלם - קודם צריך להחליט אם לרכוש את המידע
  - אם רוכשים - קודם מקבלים את מצבי הטבע ואז בוחרים
  - אם לא - קודם בוחרים ואז מקבלים את מצבי הטבע
- מידע לא מושלם - שוב, קודם צריך להחליט אם לרכוש את המידע. בכל מקרה קודם בוחרים ואז מקבלים את מצבי הטבע - אבל אם רוכשים את המידע הסיכויים למצבי הטבע השונים משתנים

ערך מידע תלוי בהרבה גורמים:

- האם המידע עדיין רלוונטי? למשל, מידע על הגרלה בלוטו שהייתה כבר לא משנה
- אם מדובר בהגרלה שטרם הייתה:
  - האם יש לנו דרך לשלוח טופס? אם לא, המידע לא משנה
  - האם יש לנו בלעדיות על המידע? אם לא, תוחלת הרווח מהמידע יורדת, שכן הרבה אנשים יתחלקו בו
  - מה גודל הפרס? כמה זוכים בו בממוצע?

הערך של המידע נמדד בהשפעה שלו על הסיכויים ובהשפעה שלו על התועלות.