אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 3 - פתרון

1. מצאו את הפולינום המינימלי של $\rho_5 = cis(2\pi/5)$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

פתרון: ידוע שהפולינום המינימלי של ρ_5 מעל $\mathbb{Q}$ הוא $\Phi_5 = \frac{x^5-1}{x-1} = x^4+x^3+x^2+x+1$. לכן הפולינום המינימלי של ρ_5 מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ מחלק את Φ_5. ניתן לבדוק שמתקיים $\rho_5 = cis(2\pi/5) = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)i$. כיוון שהמספר מרוכב, $\rho_5 \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. לכן הפולינום Φ_5 מתפרק מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ הוא מתפרק לשני גורמים מדרגה 2. אם ρ_5 שורש של פולינום מדרגה 2, אזי גם הצמוד המרוכב שלו שורש של אותו פולינום (במקרה זה $\rho_5^{\,4}$). נראה ש

$$(x-\rho_5)(x-\overline{\rho_5}) = x^2-(\rho_5+\overline{\rho_5})x+\rho_5\overline{\rho_5} = x^2-2\operatorname{Re}(\rho_5)x+\left|\rho_5\right|^2 =$$
$$= x^2-2\left(\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)x+\left(\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}i}\right)^2 =$$
$$= x^2-\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)x+1$$

פולינום זה מוגדר מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, ולכן הוא הפולינום המינימלי של ρ_5. ניתן להראות את הנ"ל גם בלי לדעת שהצמוד חייב להיות שורש של הפולינום המינימלי, כי ידוע ש $\rho_5,\ldots,\rho_5^{\,4}$ הם שורשיו של Φ_5 ואפשר לעבור על כל המכפלות האפשריות $(x-\rho_5)(x-\rho_5^{\,k})$.

2. הוכיחו ש $F(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = F(\sqrt{a},\sqrt{b})$ כאשר $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$ וגם $1+1\neq 0$ ב F (כלומר F ממאפיין $\neq 2$).

פתרון: ברור שמתקיים $F(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \subseteq F(\sqrt{a},\sqrt{b})$. נשים לב שמתקיים $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \in F(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. לכן $(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = 2\sqrt{a} \in F(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. ניתן לחלק ב 2 ולקבל $\sqrt{a} \in F(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, ומכאן גם $\sqrt{b} \in F(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. לכן $F(\sqrt{a},\sqrt{b}) \subseteq F(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

3. הראו $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)\neq\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}},\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)$.

פתרון: נסמן $\alpha=\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}},\beta=\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}$. מתקיים $\alpha\beta=\sqrt{\frac{16}{4}}=2$. לכן $\beta=\frac{2}{\alpha}\in\mathbb{Q}(\alpha)$.

כלומר $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)=\mathbb{Q}(\alpha)$. $2\alpha^2-3=\sqrt{-7}\Rightarrow\alpha^4-3\alpha^2+4=0$. הראו שהפולינום

$f(x)=x^4-3x^2+4$ הוא אי-פריק. לכן $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=4$.

מצד שני $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=7$ לכן $\alpha+\beta$ הוא שורש של x^2-7, ולכן דרגת

ההרחבה משמאל היא 2, ולכן יש אי-שיוויון בין השדות.

4. הראו שאם $a,b\in\mathbb{Z}$ זרים ואינם ריבועים, אזי $[\mathbb{Q}[\sqrt{a},\sqrt{b}]:\mathbb{Q}]=4$.

פתרון: מספיק להראות ש $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. אם $\sqrt{b}=\alpha+\beta\sqrt{a},\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ אז

$b=\alpha^2+a\beta^2+2\alpha\beta\sqrt{a}$. כעת $\sqrt{a}=\frac{b-\alpha^2-a\beta^2}{2\alpha\beta}\in\mathbb{Q}$ ונקבל סתירה אלא אם כן $\alpha\beta=0$.

אם $\beta=0$ אזי $\sqrt{b}=\alpha\in\mathbb{Q}$ סתירה. אם $\alpha=0$ אז $\sqrt{b}=\beta\sqrt{a}$ ונקבל $b=\beta^2a$.אם $\beta=\frac{r}{s}$

כאשר r,s זרים אז $s^2b=r^2a$.

נקבל $s^2\mid r^2a$ וכיוון ש r,s זרים נקבל $s^2\mid a$. בצורה דומה נקבל $r^2\mid b$. לכן נקבל שיוויון של

שלמים $\frac{b}{r^2}=\frac{a}{s^2}$. אם כך $\frac{a}{s^2}$ הוא מחלק משותף של a,b אך כיוון שאלה זרים נקבל

$\frac{a}{s^2}=1\Rightarrow a=s^2$ בסתירה לכך ש a אינו ריבוע.

5. א. הוכיחו שאם F שדה סופי אזי $F^*=F-\{0\}$ חבורה ציקלית.

פתרון: הוכחנו בכיתה שכל תת-חבורה סופית של F^* היא ציקלית, וכיוון ש F שדה סופי אזי $F^*=F-\{0\}$ חבורה סופית ולכן ציקלית.

ב. הראו שאם F שדה אינסופי אזי $F^*=F-\{0\}$ לעולם אינה חבורה ציקלית (רמז: חלקו למקרים של מאפיין 0 או מאפיין p>0. אם המאפיין p>0 הניחו בשלילה ש $F^*=<u>$ וחלקו למקרים בהם u טרנסנדנטי או אלגברי מעל שדה הבסיס $\mathbb{F}_p$).

פתרון: אם המאפיין הוא 0, אזי F מכיל את השדה $\mathbb{Q}$, ולכן $F^*\supseteq\mathbb{Q}^*$ ואם F^* ציקלית אזי $\mathbb{Q}^*$ היא ציקלית כתת-חבורה של ציקלית, אך כידוע $\mathbb{Q}^*$ אינה ציקלית (היא אינה נוצרת סופית), סתירה.

אם המאפיין p>0 אזי נניח ש $F^*=<u>$ וש u אלגברי מעל $\mathbb{F}_p$ אזי בהכרח מתקיים $F=\mathbb{F}_p(u)$, כיוון שהשדה מצד ימין מכיל $u\neq 0$, וכיוון ש $\mathbb{F}_p(u)^*$ היא חבורה, אזי היא מכילה את $<u>$. אבל $\mathbb{F}_p(u)$ הוא מ"ו וקטורי סופי מעל $\mathbb{F}_p$ ולכן יש בה $p^{[\mathbb{F}_p(u):\mathbb{F}_p]}$ כלומר השדה סופי, סתירה.
אם u טרנסנדטי מעל $\mathbb{F}_p$: לא ייתכן ש $u+1=0$, אחרת u אלגברי. לפי ההנחה קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש $u^k=u+1$. אם k חיובי אזי נקבל ש u שורש של $p(x)=x^k-x-1$ ולכן אלגברי, סתירה. אם $k=0$ אזי $u=0$ סתירה. אם $k<0$ נסמן $m=-k$ ונקבל $u^{m+1}+u^m-1=0$ כלומר u שורש של $p(x)=x^{m+1}+x^m-1$ ולכן אלגברי, סתירה.

בונוס: הוכיחו או הפריכו: כל תת-שדה של $\mathbb{C}$ סגור להצמדה מרוכבת.

פתרון: נפריך: ניקח את השדה $\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2})$, כאשר $\rho_3=cis(\frac{2\pi}{3})$. $\rho_3\sqrt[3]{2}$ הוא אחד מהשורשים של הפולינום האי-פריק x^3-2. לכן דרגת ההרחבה היא $[\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$. $\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2})$ אינו מכיל את $\rho_3{}^2\sqrt[3]{2}$ כי אחרת הוא מכיל את כל השורשים של הפולינום x^3-2 (הראו זאת), אבל השדה המכיל את כל השורשים $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\rho_3\sqrt[3]{2},\rho_3{}^2\sqrt[3]{2})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\rho_3)$ הוא הרחבה מדרגה 6 של $\mathbb{Q}$ (אלה שתי הרחבות מדרגות 2,3 וכיוון שהן זרות נקבל את הדרוש). אבל $\rho_3{}^2\sqrt[3]{2}$ הוא הצמוד של $\rho_3\sqrt[3]{2}$ ולכן $\mathbb{Q}(\rho_3\sqrt[3]{2})$ אינו סגור להצמדה.