

מתמטיקה בדידה – תרגיל 3

שאלה 1

בשני הסעיפים הבאים בדוק האם היחס R על הקבוצה A הוא יחס שקילות. אם כן, מצא את מחלקות השקילות:

- א. $A = \mathbb{N}$ על הקבוצה $xRy \Leftrightarrow 3|(x+2y)$
ב. תהי B קבוצה בעלת n איברים ונניח כי $n \geq 2$. נגדיר $A = P(B)$ ו-
 $xRy \Leftrightarrow (x \subseteq y) \vee (y \subseteq x)$

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4,5,6\}$. הסבירו מדוע אין יחסי סדר מלאים נוספים.

שאלה 3

תהי X קבוצה ו- R יחס סדר על X . נניח כי $Y \subseteq X$ ונגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$. הראו כי יחס סדר על Y .

שאלה 4

תהי X קבוצה ויהיו R, S שני יחסי סדר מלאים על X . הוכיחו כי אם $R \subseteq S$ אז $R = S$.

שאלה 5

תהי (X, \leq) קבוצה סדורה חלקית כך ש- $\inf A$ קיים לכל $A \subseteq X$, $\phi \neq A$. הראו כי לכל $A \subseteq X$ לא ריקה חסומה מלעיל קיים סופרימום.

שאלה 6

תהי A קבוצה ו- \leq יחס סדר על A . נגדיר יחס R על $A \times A$ ע"י

$$(a,b)R(c,d) \text{ אם } \{a \leq c \text{ וגם } a \neq c\} \text{ או } \{b \leq d \text{ וגם } a = c\}$$

(R נקרא הסדר המילוני על $A \times A$).

- א. הראו כי R יחס סדר על $A \times A$.
ב. ציירו דיאגרמת הסה ומצאו איברים מקסימליים, מינימליים, גדולים ביותר וקטנים ביותר של R כאשר $A = \{0,1,2\}$ ו- $\leq = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2)\}$ (אין צורך להוכיח כי \leq יחס סדר).
ג. בהנחות של סעיף ב'. מצאו את $\inf \{(1,1), (1,0), (2,0)\}$ (ייתכן שהוא אינו קיים). נמקו את קביעתכם.

שאלה 7

בסעיפים הבאים נתונות שתי קבוצות A, B ופונקציה $f: A \rightarrow B$. קבעו האם f היא פונקציה ואם כן, האם היא חח"ע ולאו על.

- א. f מוגדרת ע"י $f(x) = |x|$, $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N} \cup \{0\}$
ב. f מוגדרת ע"י $f(x) = |x|$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N} \cup \{0\}$

- ג. תהי X קבוצה כלשהי. $A = B = P(X)$ ו- f מוגדרת ע"י $f(V) = X \setminus V$. [עליכם לפתור עבור X כללית].
- ד. תהיינה X, Y קבוצות ותהי $g: X \rightarrow Y$ חח"ע (אך לא על). $A = P(X), B = P(Y)$ ו- f מוגדרת ע"י $f(V) = \{g(a) | a \in V\}$. [עליכם לפתור עבור X, Y כלליות].

שאלה 8

יהיו A, B קבוצות לא ריקות.

- א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $g: A \rightarrow A \times B$.
- ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $h: A \times B \rightarrow B \times B$.