89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 1

<u>שאלה 1</u>: כתוב את טבלת האמת עבור הפסוקים הבאים:

a) $\neg(p \wedge q) \vee \neg r$
b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \wedge r \Rightarrow (\neg r \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}))$

<u>פתרון שאלה 1</u>

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \neg \boldsymbol{r}$
T	T	T	F	F
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\neg(\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$	$\neg \boldsymbol{r} \vee (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$\neg(\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{r} \vee (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}))$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T

<u>שאלה 2</u>: הצרן את הטענות הבאות והוכח שהן שקולות (בעזרת זהויות לוגיות):

a) הטענות:
- אם יורד גשם, אז יש רוחות והשמש לא זורחת.
- אין רוחות רק אם לא יורד גשם, וגם לא יורד גשם אם השמש זורחת.

b) הטענות:
- אם הפיל לא מגיע או הקוף מטפס על העץ אז האריה לא שואג.
- האריה שואג רק אם הפיל מגיע, וגם הקוף לא מטפס על העץ אם האריה שואג.

פתרון שאלה 2

a) נסמן את הפסוקים האטומיים "יורד גשם" ב p, "יש רוחות" ב q, "השמש זורחת" ב r.

הפסוק הראשון טוען $p \Rightarrow (q \wedge \neg r)$

הפסוק השני טוען $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (r \Rightarrow \neg p)$.

נוכיח שהפסוקים שקולים:

$$p \Rightarrow (q \wedge \neg r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg p \vee (q \wedge \neg r) \overset{\text{דיסטריבוטיביות}}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \overset{\text{גרירה}}{\equiv}$$

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (r \Rightarrow \neg p)$$

b) נסמן את הפסוקים האטומיים "האריה שואג" ב p, "הקוף מטפס על העץ" ב q, "הפיל מגיע" ב r.

הפסוק הראשון טוען $(\neg r \vee q) \Rightarrow \neg p$

הפסוק השני טוען $(p \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$.

נוכיח שהפסוקים שקולים:

$$(p \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \overset{\text{דיסטריבוטיביות}}{\equiv} \neg p \vee (r \wedge \neg q) \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} (r \wedge \neg q) \vee \neg p \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\neg(\neg r \vee q) \vee \neg p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (\neg r \vee q) \Rightarrow \neg p$$

<u>שאלה 3</u>: הוכח את השקילויות הבאות בעזרת זהויות לוגיות:

a) $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg p)\big) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$

b) $\big((p \vee r) \Rightarrow \neg q\big) \vee \big(q \Rightarrow (r \wedge \neg q)\big) \equiv (q \Rightarrow \neg p) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$

פתרון שאלה 3

a) $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg p)\big) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$

$$\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg p)\big) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \big(p \vee (q \wedge \neg p)\big) \Rightarrow (\neg q \vee p) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg\big(p \vee (q \wedge \neg p)\big) \vee (\neg q \vee p) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\big(\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg p)\big) \vee (\neg q \vee p) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \big(\neg p \wedge (\neg q \vee p)\big) \vee (\neg q \vee p) \overset{\text{ספיגה}}{\equiv} \neg q \vee p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} q \Rightarrow p$$

במעבר הלפני אחרון, שימו לב שאפשר לסמן את הפסוק $\neg q \vee p$ ב r ואז המעבר הוא $(\neg p \wedge r) \vee r \equiv r$.

b) $\big((p \vee r) \Rightarrow \neg q\big) \vee \big(q \Rightarrow (r \wedge \neg q)\big) \equiv (q \Rightarrow \neg p) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$

$$\big((p \vee r) \Rightarrow \neg q\big) \vee \big(q \Rightarrow (r \wedge \neg q)\big) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \big(\neg(p \vee r) \vee \neg q\big) \vee \big(\neg q \vee (r \wedge \neg q)\big) \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv}$$

$$\big(\neg(p \vee r) \vee \neg q\big) \vee \big(\neg q \vee (\neg q \wedge r)\big) \overset{\text{ספיגה}}{\equiv} \big(\neg(p \vee r) \vee \neg q\big) \vee \neg q \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv} \neg(p \vee r) \vee (\neg q \vee \neg q) \overset{\text{אידמפוטנטיות}}{\equiv}$$

$$\neg(p \vee r) \vee \neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (\neg p \wedge \neg r) \vee \neg q \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} \neg q \vee (\neg p \wedge \neg r) \overset{\text{דיסטריבויטיביות}}{\equiv} (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv}$$

$$(q \Rightarrow \neg p) \wedge (q \Rightarrow \neg r)$$

<u>שאלה 4</u>: הוכח בעזרת זהויות לוגיות האם הפסוקים הבאים הם טאוטולוגיה או סתירה:

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

b) $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow p\big) \oplus p$

פתרון שאלה 4

a) נוכיח שהפסוק הוא טאוטולוגיה.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg p \vee (\neg q \vee p) \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} \neg p \vee (p \vee \neg q) \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv} (\neg p \vee p) \vee \neg q \overset{\text{משלים}}{\equiv} T \vee \neg q \underset{\text{זהות}}{\equiv} T$$

b) נוכיח שהפסוק הוא סתירה.

$$\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow p\big) \oplus p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \big(\neg(\neg p \vee q) \vee p\big) \oplus p \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \big((p \wedge \neg q) \vee p\big) \oplus p \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} \big((\neg q \wedge p) \vee p\big) \oplus p \overset{\text{ספיגה}}{\equiv}$$
$$p \oplus p \overset{\text{XOR}}{\equiv} (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge p) \overset{\text{משלים}}{\equiv} F$$

<u>שאלה 5</u>: הוכח בצורה פורמלית את ההיסקים הבאים:

a) הנחות: $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (r \wedge s), r \Rightarrow t, \neg t$, מסקנה: q.
b) הנחות: $p \vee q, q \Rightarrow \neg r, \neg p, \neg s \Rightarrow (r \vee \neg q)$, מסקנה: s.
c) הנחות: $p \Rightarrow (r \wedge q),\ r \Rightarrow \neg q$, מסקנה: $\neg(p \wedge q)$.

<u>פתרון שאלה 5:</u>

a) הנחות: $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (r \wedge s), r \Rightarrow t, \neg t$, מסקנה: q
<u>הוכחה</u>: לפי מודוס טולנס מ $r \Rightarrow t, \neg t$, נובע $\neg r$.
לפי כלל החיבור מ $\neg r$ נובע $\neg r \vee \neg s$.
לפי דה מורגן $\neg(r \wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$.
לפי מודוס טולנס מ $(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (r \wedge s), \neg(r \wedge s)$ נובע $\neg(\neg p \vee \neg q)$.
לפי דה מורגן $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$.
לפי חוק הפישוט מ $p \wedge q$ נובע q.

b) הנחות: $p \vee q, q \Rightarrow \neg r, \neg p, \neg s \Rightarrow (r \vee \neg q)$, מסקנה: s
<u>הוכחה</u>: לפי סילוגיזם דיסיונקטיבי מ $p \vee q, \neg p$ נובע q.
לפי מודוס פוננס מ $q \Rightarrow \neg r, q$ נובע $\neg r$.
לפי כלל הפישוט מ $q, \neg r$ נובע $\neg r \wedge q$.
לפי דה מורגן $\neg s \Rightarrow \neg(\neg r \wedge q) \equiv \neg s \Rightarrow (r \vee \neg q)$.
לפי מודוס טולנס מ $\neg r \wedge q, \neg s \Rightarrow \neg(\neg r \wedge q)$ נובע s.

c) הנחות: $p \Rightarrow (r \wedge q),\ r \Rightarrow \neg q$, מסקנה: $\neg(p \wedge q)$
<u>הוכחה</u>: לפי זהות הגרירה מ $\neg r \vee \neg q \equiv r \Rightarrow \neg q$.
לפי דה מורגן $\neg(r \wedge q) \equiv \neg r \vee \neg q$.
לפי מודוס טולנס מ $p \Rightarrow (r \wedge q), \neg(r \wedge q)$ נובע $\neg p$.
לפי כלל החיבור מ $\neg p$ נובע $\neg p \vee \neg q$.
לפי דה מורגן $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

<u>שאלה 6</u>: הצרן את ההיסקים הבאים והוכח את נכונותם:

a) השמש לא זורחת ויורד גשם. אשחה רק אם השמש זורחת. אם לא אשחה ארוץ. לכן, ארוץ.

b) דבורים אוהבות פרחים אדומים, או שהכובע שלי אדום ודבורים אוהבות כובעים אדומים.
הכובע שלי לא אדום, או שדבורים לא אוהבות כובעים אדומים אך אוהבות פרחים אדומים.
לכן, דבורים אוהבות פרחים אדומים

c) אנגן בגיטרה אם ורק אם אשיר. אצטרף ללהקה אם אנגן בתופים. לא אשיר רק אם לא אצטרף ללהקה.
לא אנגן בגיטרה. לכן, לא אנגן בתופים.

<u>פתרון שאלה 6:</u>

a) השמש לא זורחת ויורד גשם.
אשחה רק אם השמש זורחת.
אם לא אשחה ארוץ.
לכן, ארוץ.
<u>פתרון</u>: נסמן את הפסוקים: "השמש זורחת" ב p, "יורד גשם" ב q, "אשחה" ב r, "ארוץ" ב s.
כעת ההנחות הן $\neg p \wedge q, r \Rightarrow p, \neg r \Rightarrow s$, המסקנה היא s.
<u>הוכחה</u>: לפי כלל הפישוט מ $\neg p \wedge q$ נובע $\neg p$.
לפי מודוס טולנס מ $r \Rightarrow p, \neg p$ נובע $\neg r$.
לפי מודוס פוננס מ $\neg r \Rightarrow s, \neg r$ נובע s.

b) דבורים אוהבות פרחים אדומים, או שהכובע שלי אדום ודבורים אוהבות כובעים אדומים.
הכובע שלי לא אדום, או שדבורים לא אוהבות כובעים אדומים אך אוהבות פרחים אדומים.
לכן, דבורים אוהבות פרחים אדומים
<u>פתרון</u>: נסמן את הפסוקים: "דבורים אוהבות פרחים אדומים" ב p, "הכובע שלי אדום" ב q,
"דבורים אוהבות כובעים אדומים" ב r.
כעת ההנחות הן $p \vee (q \wedge r), \neg q \vee (\neg r \wedge p)$, המסקנה היא p.
<u>הוכחה</u>: לפי דיסטריבוטיביות מ $\neg q \vee (\neg r \wedge p) \equiv (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)$.
לפי כלל הפישוט מ $(\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p)$ נובע $\neg q \vee \neg r$.
לפי דה מורגן $\neg q \vee \neg r \equiv \neg(q \wedge r)$.
לפי סילוגיזם דיסיונקטיבי מ $\neg(q \wedge r), p \vee (q \wedge r)$ נובע p.

c) אנגן בגיטרה אם ורק אם אשיר.
אצטרף ללהקה אם אנגן בתופים.
לא אשיר רק אם לא אצטרף ללהקה.
לא אנגן בגיטרה.
לכן, לא אנגן בתופים.
<u>פתרון</u>: נסמן את הפסוקים: "אנגן בגיטרה" ב p, "אנגן בתופים" ב q, "אצטרף ללהקה" ב r, "אשיר" ב s.
כעת ההנחות הן $p \Leftrightarrow s, q \Rightarrow r, \neg s \Rightarrow \neg r, \neg p$, המסקנה היא $\neg q$.
<u>הוכחה</u>: לפי גרירה כפולה $p \Leftrightarrow s \equiv (p \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow p)$.
לפי כלל הפישוט מ $(p \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow p)$ נובע $s \Rightarrow p$.
לפי *contrapositive* $\neg s \Rightarrow \neg r \equiv r \Rightarrow s$.
לפי סילוגיזם היפותטי מ $q \Rightarrow r, r \Rightarrow s$, נובע $q \Rightarrow s$.
לפי סילוגיזם היפותטי מ $q \Rightarrow s, s \Rightarrow p$, נובע $q \Rightarrow p$.
לפי מודוס טולנס מ $q \Rightarrow p, \neg p$ נובע $\neg q$.