מבנים דיסקרטיים – תרגיל 9 – פתרון

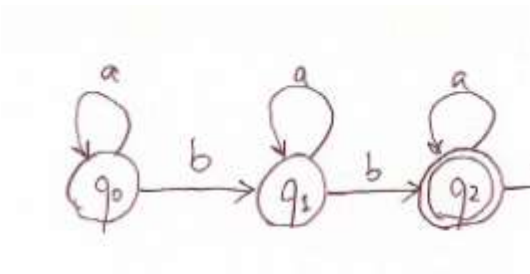
שאלה 1

עבור כל אחת מהשפות הבאות, בנו אוטומט המקבל אותה. הסבירו בקצרה מדוע האוטומט מקבל את השפה (אין צורך לתת הוכחה מלאה). הא"ב הוא $\Sigma = \{a, b\}$.

א. L_1 - כל המילים המכילות את האות b פעמיים בדיוק.
ב. $L_2 = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
ג. $L_3 = \{aab, bb\}$ (בשפה L_3 יש רק שתי מילים!)

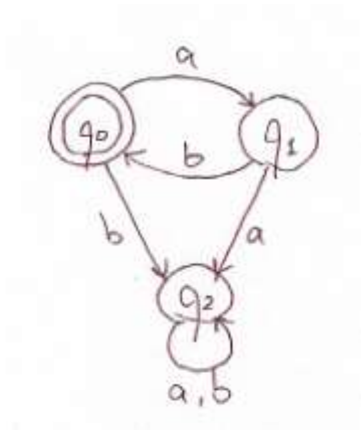
פתרון

סעיף א:



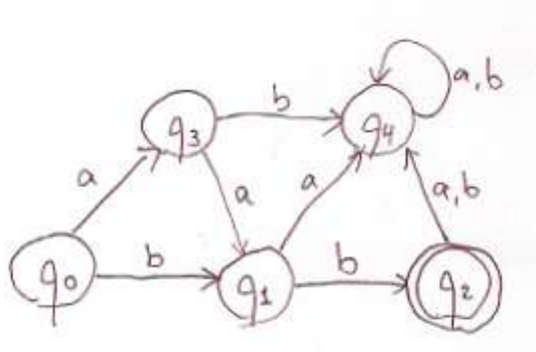
הסבר:
האוטומט נמצא ב-q_0 אם עוד לא ראינו את האות b,
האוטומט נמצא ב-q_1 אם ראינו את האות b בדיוק פעם אחת,
האוטומט נמצא ב-q_2 אם ראינו את האות b בדיוק פעמיים,
האוטומט נמצא ב-q_1 אם ראינו את האות b שלוש פעמים או יותר.

סעיף ב:

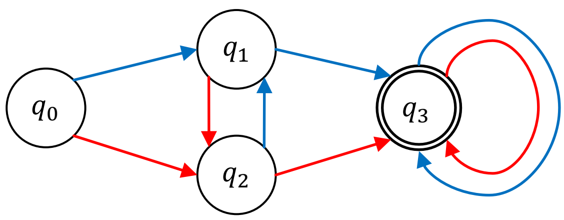


הסבר: ע"י הילוך לאחור ניתן לראות כי הדרך היחידה להגיע ל-q_0 בשני צעדים היא ע"י $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0$. לכן, כל מילה שבסופה אנחנו ב-q_0 חייב להיות מהצורה $abab \ldots abab$.

סעיף ג:



הסבר: ע"י הילוך לאחור, הדרך היחידה להגיע ל-q_2 מ-q_0 היא ע"י $q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_2$
או $q_0 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2$.



שאלה 2

יהי $\Sigma = \{a, b\}$. בשיעור ראינו את האוטומט מימין. (החצים הכחולים הם a והחיצים האדומים הם b.)

הוכיחו כי השפה שהאוטומט מקבל היא שפת כל המילים המכילות לפחות אחד מהרצפים aa או bb.

הוכחה

כוון א: נראה כי אם האוטומט מקבל מילה w אז w מכילה אחד מהרצפים aa או bb.

נכתוב $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ עבור $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \{a, b\}$ ונגדיר $p_k = \delta^*(q_0, w_1 w_2 \ldots w_k)$ (נגדיר גם $p_0 = \delta^*(q_0, \epsilon) = q_0$). אזי p_n מצב מקבל ולכן $p_n = q_3$. נסמן ב-m את המספר הקטן ביותר עבורו $p_m = q_3$. אזי $m > 0$ (כי $p_0 = q_0$) ו-$p_{m-1} \neq q_3$. כעת, לפי הילוך לאחור ייתכנו 4 מקרים עבור $p_{m-2} \xrightarrow{w_{m-2}} p_{m-1} \xrightarrow{w_{m-1}} p_m = q_3$ ($m \geq 2$ בגלל שלא ניתן להגיע מ-q_0 ל-q_3 בפחות מ-2 צעדים):

- מקרה א: $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_3$ (כלומר $p_{m-1} = q_1$, $p_{m-2} = q_0$, $w_{m-1} = a$, $w_{m-2} = a$)
- מקרה ב: $q_2 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_3$ (כלומר $p_{m-1} = q_1$, $p_{m-2} = q_2$, $w_{m-1} = a$, $w_{m-2} = a$)
- מקרה ג: $q_0 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_3$ (כלומר $p_{m-1} = q_2$, $p_{m-2} = q_0$, $w_{m-1} = b$, $w_{m-2} = b$)
- מקרה ד: $q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_3$ (כלומר $p_{m-1} = q_2$, $p_{m-2} = q_1$, $w_{m-1} = b$, $w_{m-2} = b$)

בכל מקרה $w_{m-2} w_{m-1} \in \{aa, bb\}$ ולכן w מכילה את המילה aa או את המילה bb.

כוון ב: נראה כי אם w מכילה את המילה aa או את המילה bb ונראה אז האוטומט מקבל את w.

נניח קודם כי w מכילה את aa. אזי קיימות מילים x, y כך ש-$w = xaay$. נכתוב $p = \delta^*(q_0, x)$.
נשים לב שתמיד מתקיים $\delta^*(p, aa) = q_3$. באמת,

- אם $p = q_0$ אז $\delta^*(q_0, aa) = \delta^*(q_1, a) = q_3$.

- אם $p = q_1$ אז $\delta^*(q_1, aa) = \delta^*(q_3, a) = q_3$.
- אם $p = q_2$ אז $\delta^*(q_2, aa) = \delta^*(q_1, a) = q_3$.
- אם $p = q_3$ אז $\delta^*(q_3, aa) = \delta^*(q_3, a) = q_3$.

לכן, $\delta^*(q_0, xaa) = \delta^*(p, aa) = q_3$. היות ומ-$q_3$ ניתן לעבור רק ל-q_3, $\delta^*(q_3, y) = q_3$ ולכן $\delta^*(q_0, w) = \delta^*(\delta^*(q_0, xaa), y) = \delta^*(q_3, y) = q_3$, כלומר האוטומט מקבל את w.

המקרה בו w מכיל את הרצף bb דומה. (בדקו!)

מש"ל.

שאלה 3

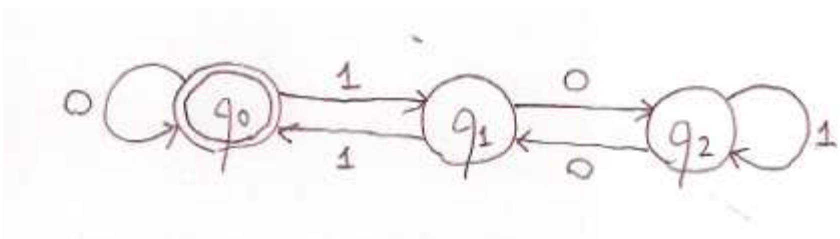
יהי $\Sigma = \{0,1\}$ ותהי $L \subseteq \Sigma^*$ שפת המספרים הבינאריים המתחלקים ב-3.
לדוגמא: $000 \in L$, 0110, $11, 1001$ אבל $01 \notin L$, 101 (אנחנו מרשים למספרים להתחיל ב-0 !).

מצאו אוטומט עם שלושה מצבים המקבל את L והוכיחו כי הוא מקבל את L.
שימו לב: על האוטומט לקבל את הספרות משמאל לימין !

[רמז: בנו את האוטומט כך שלכל $w \in \Sigma^*$ יתקיים $\delta^*(q_0, w) = q_{w \bmod 3}$.]

פיתרון

נגדיר את האוטומט הבא:



על מנת להראות שהשפה שהאוטומט מקבל היא כל המספרים הבינאריים המתחלקים ב-3 נוכיח את הטענה הבאה:

<u>טענה:</u> עבור מילה w, נסמן ב-N_w את המספר הטבעי ש-w מייצגת (לדוגמא, $N_{0010} = 2$). אזי לכל w, $\delta^*(q_0, w) = q_{N_w \bmod 3}$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה על האורך של w.

אם w מאורך 0, אז $w = \epsilon$ ו-$N_w = 0$ ובאמת מתקיים $\delta^*(q_0, \epsilon) = q_0 = q_{0 \bmod 3}$, כדרוש.

נניח כי הטענה נכונה עבור מילים באורך $n-1$ ונוכיח אותה עבור מילים באורך n: תהי w מילה באורך n. נכתוב $w = ud$ באשר $d \in \{0,1\}$. אזי u היא מילה באורך $n-1$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה $\delta^*(q_0, u) = q_{N_u \bmod 3}$. נשים לב ש-$N_w = 2N_u + d$. כעת נחלק למקרים:

א. $N_u \bmod 3 = 0, d = 0$. אזי $N_w \bmod 3 = (2 \cdot 0 + 0) \bmod 3 = 0$ ולכן מתקיים $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = \delta^*(q_0, 0) = q_0 = q_{N_w \bmod 3}$.
ב. $N_u \bmod 3 = 0, d = 1$. אזי $N_w \bmod 3 = (2 \cdot 0 + 1) \bmod 3 = 1$ ולכן מתקיים $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = \delta^*(q_0, 1) = q_1 = q_{N_w \bmod 3}$.

ג. $N_u \bmod 3 = 1, d = 0$. אזי $N_w \bmod 3 = (2 \cdot 1 + 0) \bmod 3 = 2$ ולכן מתקיים $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = \delta^*(q_1, 0) = q_2 = q_{N_w \bmod 3}$.

ד. $N_u \bmod 3 = 1, d = 1$. אזי $N_w \bmod 3 = (2 \cdot 1 + 1) \bmod 3 = 0$ ולכן מתקיים $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = \delta^*(q_1, 1) = q_0 = q_{N_w \bmod 3}$.

ה. $N_u \bmod 3 = 2, d = 0$. אזי $N_w \bmod 3 = (2 \cdot 2 + 0) \bmod 3 = 1$ ולכן מתקיים $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = \delta^*(q_2, 0) = q_1 = q_{N_w \bmod 3}$.

ו. $N_u \bmod 3 = 2, d = 1$. אזי $N_w \bmod 3 = (2 \cdot 2 + 1) \bmod 3 = 2$ ולכן מתקיים $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = \delta^*(q_2, 1) = q_2 = q_{N_w \bmod 3}$.

בכל מקרה קיבלנו $\delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = q_{N_w \bmod 3}$
ולכן $\delta^*(q_0, w) = \delta^*(\delta^*(q_0, u), d) = \delta^*(q_{N_u \bmod 3}, d) = q_{N_w \bmod 3}$, כדרוש.

<u>משל טענה.</u>

כעת נשים לב שהאוטומט מקבל מילה w <u>אם ורק אם</u> $\delta^*(q_0, w) = q_0$ (כי q_0 הוא המצב המקבל היחיד) <u>אם ורק אם</u> $q_{N_w \bmod 3} = q_0$ (בגלל הטענה) <u>אם ורק אם</u> N_w מתחלק ב-3. לכן, השפה שהאוטומט מקבל היא שפת המילים המתחלקות ב-3.

מש"ל.