

## תרגיל 2

להגשה עד 27.11.16

### שאלה 1

הוכיחו כי המידה החיצונית של קטע שווה לאורכו.

### שאלה 2

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ . הראו שאם  $A$  קבוצה חסומה אזי  $m^*(A) < \infty$ . האם ההפך נכון?

### שאלה 3

תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ , ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}$ . נגדיר  $aA + b$  להיות התמונה של  $A$  תחת הטרנספורמציה הלינארית  $T(x) = ax + b$ , כלומר:  $aA + b = \{ax + b : x \in A\}$ .

$$1. \text{ הוכיחו כי } m^*(aA + b) = |a|m^*(A).$$

2. נתון כי  $A$  מדידה לבג. האם  $aA + b$  מדידה לבג?

### שאלה 4

נאמר שקבוצה  $S \subset \mathbb{R}$  היא מטיפוס  $G_\delta$  אם ניתן להציג אותה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות. תהי  $E \subset \mathbb{R}$ . הוכיחו שקיימת קבוצה  $S \in G_\delta$  עבורה מתקיים:  $E \subseteq S$ , וכך  $m^*(S) = m^*(E)$ .

**הדרכה:** עקבו אחרי השלבים הבאים:

1. השתמשו בהגדרה של  $m^*$  והוכיחו שלכל קבוצה  $E \subset \mathbb{R}$ , ולכל  $\epsilon > 0$ , קיימת קבוצה פתוחה  $O$  המקיימת

$$m^*(O) < m^*(E) + \epsilon$$

2. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

### שאלה 5

עבור  $x \in [0, 1)$ , נסמן  $x = 0.x_1x_2x_3\dots$  את הפיתוח העשרוני של  $x$ . תהי  $A = \{x : x \in [0, 1) \text{ and } x_6 \in \{0, 7\}\}$ . הוכיחו כי

$$m^*(A) = 0.2$$

## שאלה 6

תהי  $\hat{C}$  קבוצת קנטור הסטנדרטית.

1. הוכיחו כי העוצמה של  $\hat{C}$  היא עוצמת הרצף. כלומר  $|\hat{C}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ .

2. הוכיחו כי  $\hat{C}$  אינה איחוד בן מניה של קטעים סגורים.

3. הוכיחו כי המידה החיצונית של  $\hat{C}$  היא אפס. כלומר  $m^*(\hat{C}) = 0$ .

**בהנאה (:**