אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 6

27 בינואר 2019

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

(א) $f(x+yi)=\cos x\cos y+\sin x\sin yi$

(ב) $f(x+yi)=xy+\frac{y^2-x^2}{2}i$

<u>פתרון:</u>

א. נבדוק קושי רימן: $U(x,y)=\cos x\cos y, V(x,y)=\sin x\sin y$, לכן:

$$U_x=-\sin x\cos y, U_y=-\cos x\sin y$$

$$V_x=\cos x\sin y, V_y=\sin x\cos y$$

וכיון ש $U_x\neq V_y$ נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב. $U(x,y)=xy, V(x,y)=\frac{y^2-x^2}{2}=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}$, ולכן:

$$U_x=y, U_y=x$$

$$V_x=-x, V_y=y$$

תנאי קושי רימן מתקיים: $U_x=V_y, U_y=-V_x$, ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x+yi)=U_x+V_xi=y-xi$$

2. תהי $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה. כידוע, יש $U,V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש-

$$f(x+yi)=U(x,y)+V(x,y)i$$

הוכיחו שאם V פונקציה קבועה אז f קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של f קבוע, אז f קבועה).

<u>פתרון:</u>

f גזירה, ולכן מתקיימות משוואות קושי רימן. כלומר מתקיים: $U_x=V_y, U_y=-V_x$. כעת, כיון שנתון לנו ש-V פונקציה קבועה (נניח $V=c_1$) לכן נגזרתה אפס, ולכן: $U_x=V_y=0, U_y=-V_x=0$, ולכן גם U קבועה (נניח $U=c_2$). בסה"כ נקבל: $f=U+iV=c_2+ic_1$ פונקציה קבועה.

3. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א) e^{1+2i}

(ב) $e^{5\text{cis}\pi}$

(ג) $\sin(1+i)$

(ד) $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})$

(ה) $\ln(3-4i)$

(ו) $e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i}$

<u>פתרון:</u>

א. $e^{1+2i}=e^1\text{cis}2=e\text{cis}2$.

ב. $e^{5\text{cis}\pi}=e^{-5}$.

ג. $\sin(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}-e^{-i(1+i)}}{2i}=\frac{e^{-1+i}-e^{1-i}}{2i}=\frac{e^{-1}\text{cis}1-e^1\text{cis}(-1)}{2i}=\frac{e^{-1}(\cos 1+\sin 1\cdot i)-e(\cos(-1)+\sin(-1)i)}{2i}$. כעת נקבץ ממשיים ומדומים, ניזכר ש־ $\cos(-x)=\cos x, \sin(-x)=-\sin x$, וניזכר ש $\frac{1}{i}=-i$: לכן נקבל: $\sin 1\frac{e^{-1}+e}{2}-\cos 1\frac{e^{-1}-e}{2}i$.

ד. $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})=\frac{e^{i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}+e^{-i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2}=\frac{e^{2cis\frac{4\pi}{6}}+e^{2\text{cis}\frac{10\pi}{6}}}{2}=\frac{e^{-1+\sqrt{3}i}+e^{1-\sqrt{3}i}}{2}=\frac{e^{-1}\text{cis}\sqrt{3}+e\text{cis}(-\sqrt{3})}{2}$. נדלג ישר לקיבוץ איברים דומים ולצורה הקרטזית: $\cos\sqrt{3}\frac{e+e^{-1}}{2}+\sin\sqrt{3}\frac{e^{-1}-e}{2}i=\frac{\cos\sqrt{3}(e+e^{-1})+i\sin\sqrt{3}(e^{-1}-e)}{2}=$.

ה. $\ln(3-4i)=\ln(5\text{cis}-0.927)=\ln 5+-0.972i$.

ו. $e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i}=e^{(1-i)\ln(e\text{cis}\frac{\pi}{4})}=e^{(1-i)(\ln e+\frac{\pi}{4}i)}=e^{1+\frac{\pi}{4}+(\frac{\pi}{4}-1)i}=e^{1+\frac{\pi}{4}}\text{cis}(\frac{\pi}{4}-1)$.

4. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

(א) $\sin(\overline{z})=\overline{\sin(z)}$.

(ב) $\cos(\overline{z})=\overline{\cos(z)}$.

(ג) אם $z\neq 0$ ואיננו ממשי שלילי אז: $\overline{z}^{\overline{w}}=\overline{z^w}$. הדרכה: תשאירו את z,w כמות שהם ואל תרשמו אותם בצורה קרטזית או פולרית. תלכו לפי הגדרת החזקה המרוכבת.

<u>פתרון:</u>

א. $\sin(\overline{z})=\frac{e^{i\overline{z}}-e^{-i\overline{z}}}{2i}=\frac{e^{\overline{-iz}}-e^{\overline{iz}}}{2i}$. כעת, כיון שראינו בתרגול ש $e^{\overline{z}}=\overline{e^z}$ נוכל להמשיך: $=\frac{\overline{e^{-iz}}-\overline{e^{iz}}}{2i}=\frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{2i}$. כדי שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום: $2i=\overline{-2i}$ ונקבל: $\frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{\overline{-2i}}=\overline{\left(\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{-2i}\right)}=\overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)}=\overline{\sin(z)}$.

ב. באופן דומה: $\cos(\overline{z})=\frac{e^{i\overline{z}}+e^{-i\overline{z}}}{2}=\frac{e^{\overline{-iz}}+e^{\overline{iz}}}{2}=\frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2}=\frac{\overline{e^{iz}+e^{-iz}}}{\overline{2}}=\overline{\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)}=\overline{\cos(z)}$.

ג. לפי הגדרת החזקה המרוכבת: $z^w=e^{w\ln z}$. לכן נקבל: $\overline{z}^{\overline{w}}=e^{\overline{w}\ln\overline{z}}$. ראינו בתרגול שלכל מרוכב z שאינו ממשי שלילי מתקיים $\ln\overline{z}=\overline{\ln z}$, לכן נקבל אצלנו: $=e^{\overline{w}\cdot\overline{\ln z}}=e^{\overline{w\ln z}}$, ועכשיו נשתמש בעובדה ש $e^{\overline{z}}=\overline{e^z}$ ונקבל: $=\overline{e^{w\ln z}}=\overline{z^w}$.

דרך נוספת: נרשום $w=a+bi, z=r\text{cis}\theta$, ולכן: $\overline{w}=a-bi, \overline{z}=r\text{cis}-\theta$ (ואם θ בענף הראשי, אז גם $-\theta$). נפתח את שני האגפים ונראה שמגיעים לאותו דבר:

$$\overline{z}^{\overline{w}}=e^{\overline{w}\ln\overline{z}}=e^{(a-bi)\ln(r\text{cis}-\theta)}=e^{(a-bi)(\ln r-i\theta)}=e^{a\ln r-b\theta-(a\theta+b\ln r)i}=e^{a\ln r-b\theta}\text{cis}-(a\theta+b\ln r)$$

$$\overline{z^w}=\overline{e^{w\ln z}}=\overline{e^{(a+bi)\ln(r\text{cis}\theta)}}=\overline{e^{(a+bi)(\ln r+i\theta)}}=\overline{e^{a\ln r-b\theta+(a\theta+b\ln r)i}}=\overline{e^{a\ln r-b\theta}\text{cis}(a\theta+b\ln r)}=e^{a\ln r-b\theta}\text{cis}-(a\theta+b\ln r)$$

בהצלחה!