תרגיל 7

תרגיל 1. מצאו פולינום טיילור של $e^z\cos(xy)$ סביב $(0,0,0)$ עד סדר 5.

פתרון. נשתמש בכלל ההרכבה וכפל.

$$e^z = \sum_{n=0}^{5}\frac{z^n}{5!} + o\left(z^5\right)$$
$$\cos xy = xy - \frac{x^2y^2}{2!} + o\left(x^4y^4\right) = xy - \frac{x^2y^2}{2!} + o\left(\|(x,y)\|^5\right)$$

נכפיל ונקבל:

$$\begin{aligned}
e^z\cos xy &= \left(\sum_{n=0}^{5}\frac{z^n}{n!} + o\left(z^5\right)\right)\left(xy - \frac{x^2y^2}{2!} + o\left(\|(x,y)\|^5\right)\right)\\
&= xy\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{z^n}{n!} + o\left(z^5\right)\right) - \frac{x^2y^2}{2!}\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{z^n}{n!} + o\left(z^5\right)\right) + o\left(\|(x,y)\|^5\right)\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{z^n}{5!} + o\left(z^5\right)\right)\\
&= xy + xyz + xy\frac{z^2}{2!} + xy\frac{z^3}{3!} - \frac{x^2y^2z}{2!} + o\left(\|(x,y,z)\|^5\right)
\end{aligned}$$

תרגיל 2. מצאו פולינום טיילר של $(x+y)^3$ סביב נקודה $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ מסדר 3.

נבצע הזזה:

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= ((x-a)+a+(y-b)+b)^3 = ((x-a)+(y-b)+(a+b))\\
&= (x-a)^3 + 3(x-a)^2(y-b) + 3(x-a)(y-b)^2 + (y-b)^3\\
&+ 3(x-a)^2(a+b) + 3(y-b)^2(a+b) + 6(x-a)(y-b)(a+b)\\
&+ 3(x-a)(a+b)^2 + 3(y-b)(a+b)^2 + (a+b)^3
\end{aligned}$$

תרגיל 3. מצאו פולינום טיילר של $\sin\left(xe^y\right)$ סביב הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ עד סדר 2. (המלצה: כדאי פשוט לעשות על פי הגדרה בעזרת חישוב נגזרות עד סדר 2, למרות שניתן להתשמש גם בהרכבה אחרי קצת משחקים).

פתרון. נמצא את הנגזרות החלקיות מסדר 2.

$$\begin{aligned} f_x &= e^y \cos\left(xe^y\right) \\ f_y &= xe^y \cos\left(xe^y\right) \\ f_{xx} &= -e^{2y} \sin\left(xe^y\right) \\ f_{xy} &= e^y \cos\left(xe^y\right) - \sin\left(xe^y\right) xe^{2y} \\ f_{yy} &= -x^2 e^{2y} \sin\left(xe^y\right) \end{aligned}$$

נציב את הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ונקבל

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= 1 \\ f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= 0 \\ f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= 0 \\ f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= -1 \\ f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= -\frac{\pi}{2} \\ f_{yy} &= -\frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

פיתוח טיילור מסדר 2 הוא

$$f\left(x,y\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y - \frac{\pi^2}{8}y^2 + o\left(\left\|\left(x-\frac{\pi}{2},y\right)\right\|^2\right).$$

תרגיל 4. תהי $f(x,y) = x^3y\left(e^{x^2y^3} + \cos(x^3y^2)\right)$. מצאו פיתוח טיילור של f עד סדר 44 סביב $(0,0)$. חשבו את

$$\frac{\partial^{44} f}{\partial x^{18} \partial y^{26}}\left(0,0\right).$$

(המלצה חמה: השתמשו ב Σ. כמו כן, אין צורך לחשב את הביטויים מהצורה $k!$ וניתן להשאיר אותם כ $18!$).

פתרון. נשתמש בהרכבה ובכפל. (ניתן להשתמש בהרכבה מפני שהפונקציות בחזקה מתאפסות בראשית הצירים). נקבל:

$$x^3y\left(e^{x^2y^3} + \cos(x^3y^2)\right) = x^3y\left(\sum_{i=0}^{8} \frac{x^{2i}y^{3i}}{i!} + \sum_{i=0}^{4} \frac{(-1)^i}{(2i+1)} x^{3(2i+1)} y^{2(2i+1)} + o\left(\|(x,y)\|^{44}\right)\right)$$

(אם החזקה של x^2y^3 ושל x^3y^2 גדולה מ 8 אנחנו מקבלים גורמים מחזקה של 45 או יותר

שסכומם הוא $o\left(\|(x,y)\|^{44}\right)$. נכניס גורמים ונקבל

$$x^3y\left(\sum_{i=0}^{8}\frac{x^{2i}y^{3i}}{i!}+\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{(2i+1)}x^{3i}y^{2i}+o\left(\|(x,y)\|^{44}\right)\right)=$$
$$\left(\sum_{i=0}^{8}\frac{x^{2i+3}y^{3i+1}}{i!}+\sum_{i=0}^{4}\frac{(-1)^i}{(2i+1)}x^{6(i+1)}y^{2(i+1)}+o\left(\|(x,y)\|^{44}\right)\right)$$

על מנת למצוא את $\frac{\partial^{44}f}{\partial x^{18}\partial y^{26}}(0,0)$ נחפש את המקדם המקדם של $x^{18}y^{26}$ בפיתוח טיילור. כידוע, המקדם שלו הוא

$$\frac{1}{18!26!}\frac{\partial^{44}f}{\partial x^{18}\partial y^{26}}(0,0).$$

אבל $x^{18}y^{26}$ לא מופיע בפיתוח ולכן $\frac{\partial^{44}f}{\partial x^{18}\partial y^{26}}(0,0)=0$.

תרגיל 5. (ממבחן). הראו שהמערכת

$$\begin{aligned}2x-y^2-z^2&=0\\x^2-4y-2z^2&=0\end{aligned}$$

מגדירה פונקציה גזירה ברציפות $\phi(z)=(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,2,2)$. מצאו את $\phi'(2)$.

פתרון. תחילה, מציבים $(4,2,2)$ ומקבלים שוויון. נחשב את הגרדיאנט של הפונקציה בצד שמאל של השוויון. מתקיים:

$$\nabla\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\nabla\begin{pmatrix}2x-y^2-z^2\\x^2-4y-2z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2y&-2z\\2x&-4&-2z\end{pmatrix}.$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}(4,2,2)&=\\\begin{vmatrix}2&-2y\\2x&-4\end{vmatrix}(4,2,2)&=\\\begin{vmatrix}2&-4\\8&-4\end{vmatrix}&=24\neq0\end{aligned}.$$

וכיוון ש f_1,f_2 הן פונקציות גזירות ברציפות, קיימת סביבה U של 2, וסביבה של V של $(4,2,2)$ ו

$$\phi:U\to V$$

כך $\phi(2)=(4,2)$, $\phi(z)=(x(z),y(z))$ הוא הפתרון היחיד של המשוואה

$$\begin{aligned}2x-y^2-z^2&=0\\x^2-4y-2z^2&=0\end{aligned}$$

ב V (שימו לב, זה פשוט ניסוח של המשפט של הפונקציה הסתומה). נמאת את ϕ על ידי שימוש בכלל שרשרת. מצד אחד

$$f\left(x\left(z\right),y\left(z\right),z\right)=0$$

הוא 0 באופן זהותי על U. מצד שני, x ו y הן פונקציות של z לצורך קיצור רישום, נסמן $x\left(z\right)=x,y\left(z\right)=y$. נגזור את הצד השמאלי ונשווה ל 0.

$$\left(2x-y^{2}-z^{2}\right)'=2x'-2y'y-2z=0$$
$$\left(x^{2}-4y-2z^{2}\right)'=2x'x-4y'-4z=0$$

נציב $\left(x\left(2\right),y\left(2\right),2\right)=\left(4,4,2\right)$ ונבודד את $x'\left(2\right),y'\left(2\right)$.

$$\begin{aligned}
&2x'\left(2\right)-4y'\left(2\right)-4=0\\
&8x'\left(2\right)-4y'\left(2\right)-8=0\\
&\Downarrow\\
&\begin{pmatrix}2 & -4\\ 8 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 8\end{pmatrix}\\
&\Downarrow\\
&\phi'\left(2\right)=\begin{pmatrix}x'\left(2\right)\\ y'\left(2\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 8\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}16\\ -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

תרגיל 6. (ממבחן). הראו שהמשוואה $u^{3}+2u+e^{u-x-y^{2}}=\cos\left(x^{2}+4xy-u\right)$ מגדירה פונקציה $u:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ ממחלקה $\mathcal{C}^{1}$ (ז"א, בעלת נגזרות חלקיות רציפות) בסביבה של $\left(0,0\right)$ כך ש $u\left(0,0\right)=0$. חשבו את $u_{x}\left(0,0\right)$ ו $u_{y}\left(0,0\right)$.

נגדיר

$$g\left(x,y,u\right)=u^{3}+2u+e^{u-x-y^{2}}-\cos\left(x^{2}+4xy-u\right).$$

ברור, ש g ב $\mathcal{C}^{1}$ ו $g\left(0,0,0\right)=0$ וגם מתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}\left(0,0,0\right)&=3u^{2}+2+e^{u-x-y^{2}}-\sin\left(x^{2}+4xy-u\right).\\
&=0+2+1-0=3\neq0
\end{aligned}$$

לכן, על פי משפט הפונקציה הסתומה, קיימת סביבה U של $\left(0,0\right)$, סביבה V של $\left(0,0,0\right)$ ו $u\left(x,y\right)$ ב $\mathcal{C}^{1}$ כך ש $\left(x,y,u\left(x,y\right)\right)$ הוא הפתרון היחיד של השמוואה $g\left(x,y,z\right)=0$ ב V. שוב, נשים לב ש

$$g\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=0$$

באופן זהותי על U ולכן מתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial x}g\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}g\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)=0$$

באופן זהותי על U. נגזורת את הצד השמאל לפי x ולפי y ונשווה ל 0 על מנת למצוא $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$ ואת $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)$.

$$\left(u^3+2u+e^{u-x-y^2}-\cos\left(x^2+4xy-u\right)\right)_x=$$
$$3u^2u_x+2u_x+e^{u-x-y^2}\left(u_x-1\right)+\left(2x+4y-u_x\right)\sin\left(x^2+4xy-u\right)=0$$

נציב $(0,0,u(0,0))=(0,0,0)$ ונקבל:

$$2u_x(0,0)+u_x(0,0-1=0$$

ולכן:

$$u_x(0,0)=1.$$

נבצע אותו תהליך עבור y.

$$\left(u^3+2u+e^{u-x-y^2}-\cos\left(x^2+4xy-u\right)\right)_y=$$
$$3u^2u_y+2u_y+(u_y-2y)e^{u-x-y^2}+\left(4y-u_y\right)\sin\left(x^2+4xy-u\right)=0$$

נציב $(0,0,0)$ במקום (x,y,z) ונקל:

$$2u_y(0,0)-u_y(0,0)=0$$

ולכן $u_y=0$.