8.1.'12 89118 בוחן בחצוו"א 1 ד"ר ש. נבו
בועז ווינר

ענה על 3 מ-4. ללא חומר עזר. 90 דקות. נמק תשובותיך.

1. א. צייר גרף הפונקציה

$$-\infty < x < \infty \quad , \quad f(x) = \operatorname{arctg}(x+1)$$

ב. חשב הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{3n^2+5}\right)^{\frac{n^3-3}{n^2+3}}$

2. א. חשב $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$

ב. הראה כי הסידרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$ מתכנסת לגבול סופי.

3. א. חשב הגבול העליון והגבול התחתון, $\overline{\lim}\, a_n$,

$\underline{\lim}\, a_n$ של הסידרה $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$

ב. הוכח כי לכל $\boxed{n\geq 1}$

$$1^2+1+2^2-2+3^2+3+4^2-4+\dots+(2n)^2-2n=$$

$1^2+1+2^2-2+3^2+3+4^2-4+5^2+5+6^2-6$

$$=\frac{2}{3}n(n+1)(4n-1)$$

4. בדוק התכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{n^3+n}$ ב. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$

בהצלחה!