כלל לייבניץ:

$F(x,y)=\int_a^b V(x,y,s)ds,\ (x,y)\in D$ אם $|a|+|b|<\infty$ ולכל x,y,s $V(x,y,s)$ והנגזרת שלה לפי x (y) רציפות אז $F(x,y)$ רציפה:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_a^b \frac{\partial V}{\partial x}ds \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}=\int_a^b \frac{\partial V}{\partial y}ds\right).$$

אם $|a|+|b|=\infty$ ולכל x,y,s $V(x,y,s)$ והנגזרת שלה לפי x (y) רציפות ומתקיים:

$|V(x,y,s)|\le\varphi(s),\ |V'_x(x,y,s)|\le\psi(s)$ $\psi(s)$, $\varphi(s)$ חיוביות לפי

$s\in(a,b)$ ומתקיים, $\int_a^b\psi(s)ds<\infty$, $\int_a^b\varphi(s)ds<\infty$ אז $F(x,y)$ רציפה

ובעלת נגזרת חלקית רציפה F'_x ומתקיים: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\int_a^b\frac{\partial V(x,y,s)}{\partial x}ds$

משפט ארצלה:

אם $f(x,y)$ מוגדרת ב XOY לכל $y\in\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dx$ מתכנס, ולכל $x,y\in\mathbb{R}$, קיימת $f'_y(x,y)$, ולכל $y\in\mathbb{R}$, $f'_y(x,y)$ אינטגרבילית לפי x בכל קטע סופי, וקיימת $g(x)$ אינטגרבילית כך ש:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $|f'_y(x,y)|\le g(x)$ ללא תלות ב y , וגם $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx<\infty$ אז

$F(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ גזירה לכל $y\in R$ ו $F'(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

המשפט פועל לכל המקרים בהם $x\in(a,b),\ y\in(c,d)$ באשר $\begin{cases}-\infty\le a,b\le\infty\\ -\infty\le c,d\le\infty\end{cases}$

:L1

$f(x)\in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ אם היא אינטגרבילית מקומית (אינטגרבילית בכל קטע סופי)

$f(x)\in L_1(\mathbb{R})$ אם $\|f\|_1<\infty$ כאשר

$$\|f\|_{L_1}=\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b|f(x)|dx$$

רימן לבג:

אם $f\in L_1(\mathbb{R})$, אז $F(\sigma)$ פונקציה חסומה ב $\mathbb{R}$ ורציפה (בכל $\sigma\in\mathbb{R}$).

בפרט: $|F(\sigma)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1,\ \forall\sigma\in\mathbb{R}$ ומתקיים: $\lim_{|\sigma|\to\infty}F(\sigma)=0,\forall f\in L_1(\mathbb{R})$

משפט ארצלה:

אם $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרות ב $[a,b]$, $b-a<\infty$ אינטגרביליות (במובן של רימן), והסדרה מתכנסת ל $\varphi(x)$ כלשהי, $x\in[a,b]$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$. $\varphi(x)$ אינטגרבילית, וקיימת $F(x)$ אינטגרבילית $x\in[a,b]$, כך ש $|\varphi_n(x)|\le F(x)$, $\forall n\ge1, x\in[a,b]$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)dx=\int_a^b\varphi(x)dx$$

למת רימן:

$g(t)$ מוגדרת ב $[a,b]$, $b-a<\infty$ ו $\|g\|_{L_1(a,b)}=\int_a^b|g(t)|dt<\infty$

אז: $\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt\,dt=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=0$

מסקנה:

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{a}f(t)\cos ptdt=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{a}f(t)\sin ptdt=0$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_{a}^{\infty}f(t)\cos ptdt=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int_{a}^{\infty}f(t)\sin ptdt=0$$

מסקנה:

אם $f(t)\in L_1(\mathbb{R})$ ו $F_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\sigma t}dt,\sigma\in\mathbb{R}$

אז $F_1(\sigma)$ מתכנס בהחלט ו $\forall\sigma\in\mathbb{R}$, $|F_1(\sigma)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$ וגם $F_1(\sigma)$ רציפה בכל נקודה $\sigma\in\mathbb{R}$ וגם $\lim_{|\sigma|\to\infty}F_1(\sigma)=0,\ \forall f\in L_1(\mathbb{R})$

מסקנה:

אם $f\in L_1(\mathbb{R})$ ו $\Phi_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma tdt,\sigma\in\mathbb{R}$

אז $\Phi_1(\sigma)$ רציפה, ומתכנסת בהחלט לכל $\sigma\in\mathbb{R}$ וגם $|\Phi_1(\sigma)|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_{L_1(\mathbb{R})}$ (לכל $\sigma\in\mathbb{R}$) ומתקיים $\lim_{|\sigma|\to\infty}\Phi_1(\sigma)=0,\forall f\in L_1(\mathbb{R})$ (גם עבור סינוס)

שאריות:

אם $f(z)$ מוגדרת בעיגול $\rho>0$, $a\ne\infty$, $|z-a|<\rho$ וניתנת להצגה כטור: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ שמתכנס בעיגול. אז היא רגולרית בנקודה $z=a$.

פונקציה רגולרית אם היא רגולרית בכל נקודה. אם היא לא רגולרית בנקודה אז הנקודה מבודדת. $z=a\ne\infty$ הינה קוטב של הפונקציה $f(z)$ אם ורק אם קיים $m\ge1$ (שלם) כך ש $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A\ne0$. המספר m נקרא *סדר הקוטב*. $z=a$

קוטב מסדר $m\ge1$ $\Leftrightarrow$ $\exists\rho>0$ כך שבטבעת $0<|z-a|<\rho$ עבור $f(z)$ קיים

פיתוח לורן: $f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{m=0}^{\infty}c_m(z-a)^m$

כאשר $c_{-m}\ne0$. המקדם c_{-1} בפיתוח הוא השארית: $\operatorname{Res}_{z=a}f(z)\overset{def}{=}c_{-1}$.

משפט:

אם $z=a$ - קוטב מסדר $m\ge1$ של $f(z)$.

אזי: $c_{-1}=\operatorname{Res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$

אם $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ו- $\varphi(z),\psi(z)$ רגולריות ב $z=a$, ומתקיים:

$\varphi(a)\ne0,\psi(a)=0,\psi'(a)\ne0$, אז $c_{-1}=\operatorname{Res}_{z=a}f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

משפט:

$f(z)$ ב- $\operatorname{Im}z\ge0$. אם $f(z)$ רגולרית ב $\operatorname{Im}z\ge0$ לא כולל מספר סופי של קטבים $z_1,z_2,\ldots,z_n$ וגם $k=1..n$ $\operatorname{Im}z_k>0$ וגם פונקציה $f(z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Im}z\ge0$, $|z|\ge R_0$ וגם $M(R)\to0$ עבור $R\to\infty$, כאשר $\boxed{\alpha>0}$ $M(R)=\max_{z=Re^{i\varphi},0\le\varphi\le\pi}|f(z)|$ אז V.P קיים: ($\operatorname{Im}z\le0$ זה עם מינוס):

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)$$

משפט:

אם $f(z)$ רגולרית ב $\operatorname{Im}z\ge0$ חוץ ממספר סופי של קטבים $z_1,z_2,\ldots,z_n$, כאשר $k=1..n$ $\operatorname{Im}z_k>0$. וגם $\exists\ \delta>0, R_0>0$ ו- $M\in(0,\infty)$ כך ש- $|f(z)|\le\frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ אם $\operatorname{Im}z\ge0$, $|z|\ge R_0$.אזי:

($\operatorname{Im}z\le0$ זה עם מינוס): $V.P.\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k}f(z)$

הולדר:

$f(x)$ מוגדרת ב (a,b) , $-\infty\le a<b\le\infty$ מקיימת ב $x\in(a,b)$ את *תנאי הולדר* מסדר $\alpha_1\in(0,1]$ מימין, אם $f(x+0):=\lim_{t\to+0}f(x+t)\ \exists$

וגם אם $\exists M_1\in(0,\infty)$ כך שלכל $t>0$ מספיק קטן:

$|f(x+t)-f(x+0)|\le M_1t^{\alpha_1}$ (משמאל זה עם x-t)

(מספיק ש-f תהיה בעלת נגזרות מימין או משמאל בנק' על מנת לקיים את תנאי הולדר מימין או משמאל בהתאמה).

התמרת פורייה:

ב- $L_1(\mathbb{R})$: $F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{i\sigma x}dx$

ב- $L_2(\mathbb{R})$: $F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}V.P\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot e^{i\sigma x}dx$

נוסחת פורייה:

אם $f(x)\in L_1(R)$ והיא חלקה למקוטעין בכל R , אז

$$\forall x\in R:\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ix\sigma}F(\sigma)d\sigma$$

אינטגרל פורייה בצורה הממשית:

$f\in L_1(R)$ מקיימת את תנאי הולדר מימין מסדר $\alpha_1\in(0,1]$ ומשמאל מסדר $\alpha_2\in(0,1]$ בנקודה הנתונה x.

אז:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma$$

פיתוחים שימושיים:

$$e^{-a|x|}=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x}{\sigma^2+a^2}d\sigma\qquad a>0$$

$$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{|a|}\int_0^{\infty}e^{-|a|\sigma}\cos\sigma x\,d\sigma\qquad a\ne0$$

תכונות התמרת פורייה:

$\Im[f(t-a)](\omega)=e^{i\omega a}F(\omega)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\to\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$
$\Im[f(at+b)](\omega)=\frac{1}{\lvert a\rvert}e^{-\frac{i\cdot\omega\cdot b}{a}}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\Im[f(at)](\omega)=\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$\Im\left[f^{(n)}(t)\right](\omega)=(-i\omega)^nF(\omega)$	$\Im\left[e^{i\omega_0t}f(t)\right](\omega)=F(\omega+\omega_0)$
$\Im\left[(it)^nf(t)\right](\omega)=F^{(n)}(\omega)$	$\Im\left[x^n[f]\right]=(i)^n\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$
$\Im[\Im[f]]=f(-t)$	$\Im[(f_1*f_2)(t)]=\sqrt{2\pi}\cdot F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

$$\Im[f(t)\cos(at)](\omega)=\frac{F(\omega-a)+F(\omega+a)}{2}$$

$$\Im[f(t)\sin(at)](\omega)=\frac{F(\omega+a)-F(\omega-a)}{2i}$$

$$e^{ibx}\cdot f(ax+c)\to\frac{1}{|a|}e^{-i\frac{c}{a}(\sigma+b)}F\left(\frac{\sigma+b}{a}\right)$$

$$f(ax+c)\cdot\cos bx\to\frac{1}{2|a|}\left[e^{-i\frac{c}{a}(\sigma+b)}F\left(\frac{\sigma+b}{a}\right)+e^{-i\frac{c}{a}(\sigma-b)}F\left(\frac{\sigma-b}{a}\right)\right]$$

$$f(ax+c)\cdot\sin bx\to\frac{1}{2|a|i}\left[e^{-i\frac{c}{a}(\sigma+b)}F\left(\frac{\sigma+b}{a}\right)-e^{-i\frac{c}{a}(\sigma-b)}F\left(\frac{\sigma-b}{a}\right)\right]$$

$$\overline{f(x)}\to\overline{F(-\sigma)}\qquad f(-x)\to F(-\sigma)$$

$$f(x)=\overline{f(x)}\Rightarrow\overline{F(\sigma)}=F(-\sigma),\quad f(x)=f(-x)\Rightarrow F(\sigma)=F(-\sigma)$$

התמרה הפוכה:

$f(x)\to F(\sigma)$

$$\boxed{\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma}$$

השלמה זוגית ואי זוגית:

$f\in L_1(R)$ חלקה למקוטעין בכל R ,

אם f זוגית:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t)\cos\sigma tdt\right]\cos\sigma xd\sigma,x\in R$$

אי זוגית:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}f(t)\sin\sigma tdt\right]\sin\sigma xd\sigma,x\in R$$

קוסינוס התמרת פורייה:

$\hat f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos(\sigma t)dt$

סינוס התמרת פורייה:

$\hat f_s(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin(\sigma t)dt$

אם f רציפה מתקיים:

$$f(x)=\hat f_c(\hat f_c(\sigma))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat f_c(\sigma)\cos\sigma xd\sigma$$

$$f(x)=\hat f_s(\hat f_s(\sigma))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat f_s(\sigma)\sin\sigma xd\sigma$$

:L2

$f(x)$ ממשית/מרוכבת עם ארגומנט ממשי $x\in R=(-\infty,\infty)$.

$f(x)\in L_2(R)$ אם היא אינטגרבילית בכל $[a,b]$

$b-a<\infty$, וגם $\|f\|^2_{L_2(R)}\overset{def}{=}\|f\|^2\overset{def}{=}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$ מתכנס.

נורמות:

אם $f(x)\in L_2(R),g(x)\in L_1(R)$ אז

$$\|g\|_1:=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt,\quad \|f\|_2:=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

התמרות פורייה שימושיות:

#	$f(x)$	$\hat f(\sigma)$
1	$f(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x\notin(-1,1)\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\sigma}{\sigma}$
2	$f(x)=\begin{cases}1 & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a,b)\end{cases}\quad(a<b)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ib\sigma}-e^{ia\sigma}}{i\sigma}$
3	$e^{-a\lvert x\rvert}$ $(a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{(a^2+\sigma^2)}$
4	$\frac{1}{x^2+a^2}\quad(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert\sigma\rvert}}{a}$
5	$\begin{cases}e^{-x} & x\ge0\\ 0 & x\le0\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1-i\cdot\sigma}$
6	e^{-ax^2} $(a>0)$	$\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}$

פונקציות אקוויוולנטיות:

אם $f(x)-g(x)=0$

פונדמנטלית:

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\in L_p(R)$ *מתכנסת לעצמה (פונדמנטלית)*

אם $\lim_{n,m\to\infty}\|f_m(x)-f_n(x)\|_p=0$

פלנשראל:

$f\in L_2(R)$, $\sigma\in R$, $F_N(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}f(x)e^{i\sigma x}dx$

$F_N(\sigma)\in L_2(R),\forall N\ge1$, בנוסף $\{F_N(\sigma)\}_{N=1}^{\infty}$ פונדמנטלית (סדרת קושי) ב- $L_2(R)$, ולכן קיים גבול הממוצע הריבועי:

$F(\sigma)=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}F_N(\sigma)$, $\forall f\in L_2(R)$ כאשר:

$\|F(\sigma)\|_2=\|f\|_2$, $\forall f\in L_2(R)$ **(שיוויון פרסיבל)**

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)\cdot\overline{G(\sigma)}d\sigma$$

כריכה (קונבולוציה):

$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt,x\in R$

התמרה של כריכה:

$\widehat{(f*g)}(\sigma)=\sqrt{2\pi}\hat f(\sigma)\hat g(\sigma)$

פרדהולם מסדר 2:

$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^bK(x-t)\varphi(t)dt$

פתרון:

יהיו $f\in L_2(R),\ K(t)\in L_1(R)$

ו $\forall\sigma:\ 1-\lambda\sqrt{2\pi}\hat K(\sigma)\ne0$

אז יש פתרון יחיד $\varphi(x)$ ב $L_2(R)$, $\hat\varphi(\sigma)=\frac{\hat f(\sigma)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\hat K(\sigma)}$ לכן לפי

נוסחת ההפיכה $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat f(\sigma)e^{-i\sigma x}}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\hat K(\sigma)}d\sigma$

פונקציית מקור:
$f(t)$ מרוכבת של t ממשי, רציפה למקוטעין, וגם $f(t)\equiv 0$ עבור $t<0$ וגם $\exists s\in R, \exists M>0$ כך ש: $\forall t\in R$ $|f(t)|\le Me^{st}$

מעריך הגידול:
$s_0=\inf_{S}\{S\}$ החסם התחתון

נוסחאות: $s_0=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(t)|}{t}$, $M=\sup_{t\ge0}|f(t)|e^{-(s_0+\varepsilon)t}$

פונקציית הביסייד:
$\eta(t)=\begin{cases}0\ , t<0\\ 1\ , t\ge0\end{cases}$

התמרת לפלס:
$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$

התמרות לפלס שימושיות:

$f(t)$	תחום	$F(s)$	תחום
1	$t>0$	$\frac{1}{s}$	$s>0$
$e^{zt}, z\in\mathbb{C}$	$t>0$	$\frac{1}{s-z}$	$s>\text{Re}\,z$
$\sin at, a\in\mathbb{R}$	$t>0$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos at, a\in\mathbb{R}$	$t>0$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$t^n, n\in\mathbb{N}$	$t>0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$	$t>0$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}, a\in\mathbb{R}$	$t>0$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$0\le c\in R, u_c(t)=\begin{cases}1,t\ge c\\0,t<c\end{cases}$	$t>0$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s>0$	$s>0$

כריכה:
יהיו f(t) ו- $\varphi(t)$ מקורות, אזי הקונבולוציה שלהם $(f*\varphi)(t)$ גם כן פונקציית מקור, ומעריך הגידול שלה $\sigma\le\max\{\sigma(f),\sigma(\varphi)\}$.

$(f*\varphi)(t)=\int_0^t f(\xi)\varphi(t-\xi)d\xi$.

הכריכה היא פוקציה רציפה, והפעולה קומוטטיבית.

תכונות התמרת לפלס:

$e^{-ar}f(r)\to L(p+a)$ $\text{Re}(p+a)>s_0$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\to\alpha L_1(p)+\beta L_2(p)$
$f(r-a)\to e^{-pa}L(p)$ $\text{Re}(p)>s_0$	$f(ar)\to\frac{1}{a}L\left(\frac{p}{a}\right)$ $\text{Re}(p)>a\cdot s_0, \forall a>0$
$\frac{1}{r}f(r)\to\int_p^\infty F(s)ds$ אם $\frac{f(r)}{r}$ מקור	$r^n f(r)\to(-1)^n L^{(n)}(p)$
$\int_0^r f(s)ds\to\frac{L(p)}{p}$	בורל: $(f_1*f_2)(r)\to L_1(p)\cdot L_2(p)$ דיואמל: כאשר g(t) בעלת נגזרת רציפה. $\frac{d}{dt}(f*g)(t)=g(0)f(t)+(f*g')(t)\to p\cdot F(p)\cdot G(p)$

אם $f^{(k)}(r)$ מקור $f^{(k)}(r)\to p^kL(p)-p^{k-1}f(0)-p^{k-2}f'(0)-\ldots-f^{(k-1)}(0)$ לכל $k=1..n$.

עבור פונקציה מחזורית $f(x)=f(x+T)$: $F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pr}f(r)dr$

אם F(p) היא תמונה, אזי $\lim_{\text{Re}P=s\to\infty}F(s)=0$

משפט:
אם $f(r,\alpha)$ מקור $\forall\alpha$ $f(r,\alpha)\to F(p,a)$ וגם $\int_{\alpha_1}^{\alpha}f(r,\alpha)d\alpha, \frac{\partial f}{\partial\alpha}(r,\alpha)$ מקורות אז

$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(r,\alpha)\to F'_\alpha(p,\alpha), \int_{\alpha_1}^{\alpha}f(r,\alpha)d\alpha\to\int_{\alpha_1}^{\alpha}F(p,\alpha)d\alpha$

משפט:
אם $f(r)$ מקור, $f(r)\to F(p)$ וגם $\int_0^\infty\frac{f(r)}{r}dr$ קיים אז

$\int_0^\infty\frac{f(r)}{r}dr=\int_0^\infty F(p)dp$

פונקציית גמא:
$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-r}\cdot r^{x-1}dr$.

תכונות: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $t^\alpha\to\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$

עבור $\alpha>-1$

בעיית ערך שפה:
נתונה: $-y''(x)+q(x)y(x)=f(x),\ x\in R$, $\lim_{|x|\to\infty}y(x)=\lim_{|x|\to\infty}y'(x)=0$ כאשר $0\le q(x)\in L_1^{loc}(R)$

פתירות:
המשוואה פתירה **(קורקטית)** ב- $L_1(R)$ אם לכל $f(x)\in L_1(R)$ המשוואה בעלת פתרון יחיד $y(x)\in L_1(R)$ וגם $\exists c\in(0,\infty)$, כך שפתרון המשוואה $y(x)\in L_1(R)$ מקיים:

$\|y\|_1\le c\|f\|_1, \forall f\in L_1(R)$

משפט:
המשוואה פתירה ב- $L_1(R)$ $\Leftrightarrow$ $\exists a\in(0,\infty)$:

$\inf_{x\in R}\int_{x-a}^{x+a}q(t)dt>0$

מסקנה:
אם המשוואה פתירה ב- $L_1(R)$ ו- $y(x)\in L_1(R)$ פתרונה. אז:

$y(x)\to0\ ,\ y'(x)\to0$ עבור $|x|\to\infty$ וגם

$\|y''\|_1+\|q(x)y\|_1\le3\|f\|_1$

וגם $\|y(x)\|_{C(R)}\le c\{\|y''\|_1+\|y\|_1\}\le c\|f\|_1$

תכונות משוואה פתירה:
1. בעלת פתרון יחיד $y(x)\in L_1(R)$
2. הפתרון $y(x)\in L_1(R)\cap C(R)$,
3. $\boxed{y''\in L_1(R)}\Leftarrow$ אם $y(x)\to F(\sigma)$ אזי, $F(\sigma)\in L_1(R)$
4. $y(x)\to0\ ,\ y'(x)\to0$ עבור $|x|\to\infty$.

פתרון סופי כאשר $q(x)=q_0^2=const$:

$$y(x)=\frac{1}{2q_0}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-|t-x|q_0}dt$$

פתרון מד"ר עם סינוס וקוסינוס התמרת פורייה:
$$\begin{cases}-y''(x)+q(x)y(x)=f(x)\ ,\ x\in R_+\ ,\ f\in L_1(0,\infty)\\ y(0)=0\ ,\ y(\infty)=y'(\infty)=0,\ \ 0\le q(x)\in L_1^{loc}(0,\infty)\end{cases}$$

אם $y(0)=0$ אז נשתמש בהמשכה אי זוגית לכל נבחר סינוס התמרת פורייה. אם $y'(0)=0$ אז נשתמש בהמשכה זוגית ונבחר קוסינוס התמרת פורייה.

מקור של תמונה רציונלית:
משפט:
$F(p)$ שבר רציונלי אמיתי ($F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$ כאשר $A(p),B(p)$ פולינומים שלא ניתן לצמצם) עם קטבים $p_1,\ldots,p_n$ ו- $r_1,\ldots,r_n$ הם הריבויים שלהם ומתקיים $\lim_{|p|\to\infty}F(p)=0$ (ז"א $F(p)$ שבר אמיתי). אז:

$$f(t)=\begin{cases}0,t<0\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\{F(p)(p-p_k)^{r_k}e^{pt}\},t\ge0\end{cases}$$

משפט:
$F(p)$ שבר רציונלי אמיתי עם קטבים $p_1,\ldots,p_n$ ו $r_1,\ldots,r_n$ הם הריבויים שלהם, אם הפיתוח לשברים אמיתיים של $F(p)$ הינו מהצורה:

$F(p)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{kl}}{(p-p_k)^l}$ כאשר M_{kl} קבועים, אז המקור הוא:

$$f(t)=\begin{cases}0,t<0\\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r_k}\frac{M_{kl}}{(l-1)!}t^{l-1}e^{p_kt},t\ge0\end{cases}$$

משפט פיתוח:
יהי $F(p)$ כך שניתן לפתחו לטור חזקות לפי $\frac{1}{p}$:

$F(p)=\frac{a_0}{p}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$. אם הטור מתכנס עבור $|p|>R>0$ אז

$f(t)=\begin{cases}0,t<0\\ a_0+\frac{a_1}{1!}t+\ldots+\frac{a_n}{n!}t^n+\ldots,t\ge0\end{cases}$ בנוסף

$s_0\le1+l_0,\ l_0=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$

משוואה אינטגרלית של וולטרה מסוג כריכה:
$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

$\varphi(x)\to\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\bar{K}(p)}$, $\bar{K}(p)\ne1$

עבור מערכת של משוואות, מביעים את המשוואות באמצעות כריכות, עוברים לתמונות, ופותרים לפי כלל קרמר.

פתרון בעיית קושי למד"ר ליניארית עם מקדמים קבועים בעזרת התמרת לפלס:
נתונה בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases}a_0y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=f(t),t>0\\ \lim_{t\to+0}y(t)=y_0,\lim_{t\to+0}y'(t)=y_0'\end{cases}$$

כאשר $f(t)$ מקור ו a_0,a_1,a_2 קבועים וממשיים.

אם $f(t)$ מקור רציפה, אז לבעיה קיים פתרון יחיד והוא מקור.

עקרון הסופרפוזיציה:
נחפש פתרון לבעיה ע"י הסכום $y(t)=x(t)+z(t)$ כאשר $x(t),z(t)$ הם פתרונות לבעיות הקושי הבאות:

$$\begin{cases}a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0,t>0\\ \lim_{t\to+0}x(t)=y_0,\lim_{t\to+0}x'(t)=y_0'\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_0z''(t)+a_1z'(t)+a_2z(t)=f(t),t>0\\ \lim_{t\to+0}z(t)=0,\lim_{t\to+0}z'(t)=0\end{cases}$$

פתרון הבעיה ההומוגנית:
מציאת המקור x(t) כך ש:

$x(t)\to X(p)=\frac{a_0\cdot y_0\cdot p+a_0\cdot y_0'+a_1\cdot y_0}{a_0p^2+a_1p+a_2}$

פתרון הבעיה הלא הומוגנית:
שיטה I: במקרים בהם קל למצוא את התמונה של המקור $f(t)$:

מציאת המקור z(t) כך ש:

$z(t)\to Z(p)=\frac{F(p)}{a_0p^2+a_1p+a_0}$

שיטה II: כאשר קשה למצוא את התמונה של המקור $f(t)$:

$z(t)=\int_0^t f(\xi)z_1'(t-\xi)d\xi$, כאשר: $z_1(t)\to Z_1(p)=\frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2}\frac{1}{p}$

תנאי התחלה לא ב-0:
אם תנאי ההתחלה הם ב- x_0 ולא ב-0, מבצעים החלפת משתנים מ- t ל- x:

$t=x_0+x$

פישוט לפתרון בעיית קושי:
נתונה בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases}a_0y''(t)+a_1y'(t)+a_2y(t)=f(t)\ \ ,t>0\\ \lim_{t\to+0}y(t)=y_0,\lim_{t\to+0}y'(t)=y_0'\end{cases}$$

מספיק לפתור את הבעיה הבאה עבור z(t) ואח"כ לחזור ל-y(t):

$$\begin{cases}a_0z''(t)+a_1z'(t)+a_2z(t)=f_1(t)\ \ ,t>0\\ \lim_{t\to+0}z(t)=0,\lim_{t\to+0}z'(t)=0\end{cases}$$

כאשר מציבים: $y(t)=z(t)+At+B$ כך ש- $z(0)=z'(0)=0$. לכן מתקיים:

$f_1(t)=f(t)-a_2\cdot y_0'\cdot t-a_2\cdot y_0-a_1\cdot y_0'$ $\quad$ $y(t)=z(t)+y_0+y_0'\cdot t$

בשימוש בשיטה זו אין צורך לפתור את הבעיה ההומוגנית עבור z(t) מכיוון שפתרונה הוא 0.

כלל קרמר לפתירת מספר משוואות:
אם נתון $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ אז $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ ומתקיים

$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\Delta},x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\Delta}$

פתרון מערכות מד"ר:
נתונה המערכת הבאה:

$$\left.\begin{array}{l}y_1'(t)+a_{11}y_1(t)+a_{12}y_2(t)=f_1(t)\\ y_2'(t)+a_{21}y_1(t)+a_{22}y_2(t)=f_2(t)\\ y_1(0)=y_2(0)=0\end{array}\right\},t>0$$

כאשר $f_1(t)$ ו- $f_2(t)$ הן פונקציות מקור רציפות.

שיטה I:

נעבור לתמונות $y_1(t)\to Y_1(p),\ \ y_2(t)\to Y_2(p)$. נסמן:

$\Delta(p)=\begin{vmatrix}p+a_{11}&a_{12}\\a_{21}&p+a_{22}\end{vmatrix}$.

אז לפי כלל קרמר: $Y_1(p)=\frac{\begin{vmatrix}F_1(p)&a_{12}\\F_2(p)&p+a_{22}\end{vmatrix}}{\Delta(p)}$, $Y_2(p)=\frac{\begin{vmatrix}p+a_{11}&F_1(p)\\a_{21}&F_2(p)\end{vmatrix}}{\Delta(p)}$

שיטה II: פתרון במקרה שקשה למצוא את $F_1(p),F_2(p)$:

מוצאים פונקציות $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ כך שהן פתרונות למערכות הבאות:

$$\begin{cases}\alpha_1'(t)+a_{11}\alpha_1(t)+a_{12}\beta_1(t)=1\\ \beta_1'(t)+a_{21}\alpha_1(t)+a_{22}\beta_1(t)=0\\ \alpha_1(0)=\beta_1(0)=0\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha_2'(t)+a_{11}\alpha_2(t)+a_{12}\beta_2(t)=0\\ \beta_2'(t)+a_{21}\alpha_2(t)+a_{22}\beta_2(t)=1\\ \alpha_2(0)=\beta_2(0)=0\end{cases}$$

(פותרים ע"י השיטה הקודמת).

הפתרון למערכת המקורית נתון ע"י:

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1'&\alpha_2'\\\beta_1'&\beta_2'\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f_1*\alpha_1')(t)+(f_2*\alpha_2')(t)\\(f_1*\beta_1')(t)+(f_2*\beta_2')(t)\end{pmatrix}$$

(* מסמן פעולת כריכה)

משפט 4.1 (ארצלה):

תהי נתונה פונקציה $f(x,y)$ על הישר (x,y) $x\in[a,b],\ y\in[c,d]$ כאשר $b-a<\infty,\ d-c<\infty$. אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $f(x,y)$ אינטגרבילית לפי x ב$[a,b]$ עבור כל $y\in[c,d]$
2. הפונקציה $f(x,y)$ אינטגרבילית לפי y ב$[c,d]$ עבור כל $x\in[a,b]$
3. (הפונקציה $f(x,y)$ חסומה בהחלט במישור $\sup_{x,y}|f(x,y)|\le L<\infty$ $([a,b]\times[c,d]$).

אז קיימים שני האינטגרלים *המחוזרים*:

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy,\quad \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

והם שווים אחד לשני.

נשתמש בהמשך בסימון הבא:

$$\Pi(\infty)=\{(x,y):\ x\in[a,\infty),\ y\in[c,d],\ d-c<\infty\}$$

הגדרה 4.2 אינטגרל לא אמיתי

$$J(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx,\ y\in[c,d]\quad(4.1)$$

נקרא *מתכנס במידה שווה* ב-$y\in[c,d]$, אם מתקיים:

1. $\forall y\in[c,d]$ האינטגרל $J(y)$ קיים
2. $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0=A_0(\varepsilon)\ge a$ כך שלכל $A\ge A_0$ מתקיים האי שוויון הבא:

$$\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_A^\infty f(x,y)dx\right|\le\varepsilon$$

משפט 4.3:

אינטגרל (4.1) מתכנס במידה שווה ב$y\in[c,d]$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0=A_0(\varepsilon)$

כך ש: $$\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,y)dx\right|\le\varepsilon\quad\forall A_2\ge A_1\ge A_0(\varepsilon)$$

משפט 4.4 (קריטריון ויירשטראס):

אם הפונקציה $f(x,y)$

1. מוגדרת ב $\Pi(\infty)=\{(x,y):\ x\ge a,\ y\in[c,d]\}$
2. $f(x,y)\in L_1^{loc}(a,\infty)\quad\forall y\in[c,d]$
3. $\sup_{y\in[c,d]}|f(x,y)|\le g(x),\ x\in[a,\infty)$
4. $g(x)\in L_1(a,\infty)$

אז האינטגרל $J(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במידה שווה ב$y\in[c,d]$.

נוסחת דיריכלה:

נניח ש-f(x,y) פונקציה רציפה ב-D, $D=\{(x,y):x\ge0,y\ge0\}$ ו-

$\int_0^\infty[\int_0^x f(x,y)dy]dx<\infty$ אזי:

$$\int_0^\infty[\int_0^x f(x,y)dy]dx=\int_0^\infty[\int_y^\infty f(x,y)dx]dy$$

משפט 4.5 (אבל-דריכלה):

אם הפונקציה $f(x,y)$

1. מוגדרת ב $\Pi(\infty)=\{(x,y):\ x\ge a,\ y\in[c,d]\}$
2. $f(x,y)\in L_1^{loc}(a,\infty)\quad\forall y\in[c,d]$
3. $\sup_{x\ge a}\left|\int_a^x f(t,y)dt\right|\le M<\infty,\ M=const,\ \forall y\in[c,d]$
4. הפונקציה $g(x)$ מונוטונית ומתכנסת ל0 עבור $x\to+\infty$

אז האינטגרל $J(y)=\int_a^\infty f(x,y)\cdot g(x)dx$ מתכנס במידה שווה

משפט 4.6:

תהי הפונקציה $f(x,y)$, אם מתקיים:

1. $f(x,y)$ מוגדרת ב $\Pi(\infty)=\{(x,y):\ x\ge a,\ y\in[c,d]\}$
2. $f(x,y)$ רציפה ב$\Pi(\infty)$ כפונקציה של שני משתנים.
3. האינטגרל $J(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במידה שווה ב$y\in[c,d]$

אז הפונקציה $J(y)$ רציפה ב$y\in[c,d]$ וגם מתקיים השוויון:

$$\int_c^d J(y)dy=\int_c^d\left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right]dy=\int_a^\infty\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

משפט 4.7:

אם הפונקציה $f(x,y)$

1. מוגדרת ב $\Pi(\infty)=\{(x,y):\ x\ge a,\ y\ge c\}$
2. רציפה ב$\Pi(\infty)$ כפונקציה של שני משתנים.
3. האינטגרלים $\int_a^\infty f(x,y)dx,\ \int_c^\infty f(x,y)dy$ מתכנסים במידה שווה (הראשון לפי x, השני לפי y) בכל קטע סופי.

אז אם קיים אחד מהאינטגרלים:

$$\int_c^\infty\left[\int_a^\infty|f(x,y)|dx\right]dy,\quad \int_a^\infty\left[\int_c^\infty|f(x,y)|dy\right]dx$$

אזי קיימים ושווים האינטגרלים המחוזרים:

$$\int_c^\infty\left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right]dy=\int_a^\infty\left[\int_c^\infty f(x,y)dy\right]dx$$

עיקרון דריכלה

אם:

1. הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סופי $[a,A],(A>a)$

והאינטגרל $\int_a^A f(x)dx$ חסום במידה שווה על A:

$$\sup_{A>0}\left|\int_a^A f(x)dx\right|<\infty$$

2. הפונקציה $g(x)\to0$ כאשר $x\to\infty$ (שאיפה מונוטונית)

אזי האינטגרל $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

אינטגרלים שימושיים:

$$\int x\sin(ax)\,dx=\frac{\sin(ax)}{a^2}-\frac{x\cos(ax)}{a}$$

$$\int x\cos(ax)\,dx=\frac{\cos(ax)}{a^2}+\frac{x\sin(ax)}{a}$$

$$\int x^2\sin(ax)\,dx=\frac{2x}{a^2}\cdot\sin(ax)+(\frac{2}{a^3}-\frac{x^2}{a})\cdot\cos(ax)$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx=\frac{2x}{a^2}\cdot\cos(ax)-(\frac{2}{a^3}-\frac{x^2}{a})\cdot\sin(ax)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin(bx)-b\cos(bx))}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}$$

$$\int x^2e^{ax}dx=\left(\frac{\left(a^2x^2-2ax+2\right)}{a^3}\right)e^{2ax}$$

$$\int xe^{ax}dx=\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x\cdot\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x\cdot\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\cdot\arctan(\frac{x}{a})$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin(\frac{x}{a})$$

$$\int u'\cdot v\,dx=uv-\int uv'\,dx$$

אינטגרלים לא אמיתיים:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin px}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & p>0\\ 0 & p=0\\ -\frac{\pi}{2} & p<0\end{cases}$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin px\cdot\cos qx}{x}dx=\begin{cases}0 & p>q>0\\ \frac{\pi}{2} & q>p>0\\ \frac{\pi}{4} & p=q>0\end{cases}$$

$$\int_0^\infty\frac{\cos px-\cos qx}{x}dx=\ln\frac{q}{p}$$

נוסחאות טריגונומטריות:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^3\alpha=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin(3\alpha)$$

$$\cos^3\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos(3\alpha)$$

$$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin(\alpha/2\pm\beta/2)\cos(\alpha/2\mp\beta/2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\alpha/2+\beta/2)\cos(\alpha/2-\beta/2)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin(\alpha/2+\beta/2)\sin(\beta/2-\alpha/2)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha)=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$$

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$