88-236 חשבון אינפיניטיסימלי 4

פתרון תרגיל בית 1

1. היעזר במשפט קושי-בינה כדי למצוא:

א. שטח של מקבילית ב- $\mathbb{R}^4$ כאשר צלעותיו $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

ב. נפח של מקבילון תלת-מימדי ב- $\mathbb{R}^4$ כאשר צלעותיו $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

פתרון:

א. נבנה מטריצה: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

$$\det\left(AA^T\right)=\sum_{S\in\binom{[4]}{2}}\det\left(A_{[2],S}\right)\cdot\det\left(A^T_{S,[2]}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2=4+0+4+4+0+4=16$$

לכן $S_{par}=\sqrt{det(AA^T)}=4$.

ב. נבנה מטריצה: $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

$$\det\left(AA^T\right)=\sum_{S\in\binom{[4]}{3}}\det\left(A_{[3],S}\right)\cdot\det\left(A^T_{S,[3]}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}^2=1+1+1+1=4$$

לכן $V_{par}=\sqrt{det(AA^T)}=2$.

2. מצא ללא חישוב ישיר של אינטגרלים את:

א. שטח של אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

ב. נפח של אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

פתרון:

א. נעשה החלפת משתנים ליניארית: $\begin{pmatrix} au \\ bv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} T$. העתקה זו נתונה ע"י $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ והיא מעתיקה עיגול היחידה לאליפסה. לכן שטח האליפסה:

$$S_{ellipse} = \iint_{ellipse} dxdy = |\det(T)| \iint_{circle} dxdy = |a\cdot b|\pi$$

ב. נפתור באותו האופן. כאן $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, לכן

$$V_{ellipse} = \iiint_{ellipsoid} dxdydz = |\det(T)| \iiint_{sphere} dxdydz = \frac{4\pi}{3}|a\cdot b\cdot c|$$

3. יהי $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, כך ש- $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$ ויהי $A \subset \mathbb{R}^n$ תחום הנתון ע"י: $|x_1| + |x_2|^2 + |x_3|^3 + \cdots + |x_n|^n \le 1$. מצא $Vol_n(T(A))/Vol_n(A)$

פתרון: לא משנה מהו תחום A כל עוד יש לו נפח חיובי וסופי. בתרגיל זה ברור שיש ל-A נפח סופי וחיובי, לכן מכיוון ש- T מיוצגת על ידי מטריצה אלכסונית:

$$\frac{Vol_n(T(A))}{Vol_n(A)} = \det(T) = n!$$

4. יהי $q(x)$ פונקציה רציפה מעל $\mathbb{R}$. נניח כי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקיימות משוואות דיפרנציאליות הבאות: $f''(x) = q(x)\cdot f(x)$ ו- $g''(x) = q(x)\cdot g(x)$. צריך לבטא את השטח של מקבילית $A(x)$ הנפרס על ידי $\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$ במונחים של $A(0)$.

פתרון: נגדיר פונקציה $B(x) = \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$. לכן $A(x) = |B(x)|$.

$$B'(x) = f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f'(x)g'(x) - f''(x)g(x) = q(x)\big(f(x)g(x) - f(x)g(x)\big) = 0$$

לכן $B(x)$ פונקציה קבועה ולכן גם $A(x)$. לסיכום $A(x) = A(0)$.

5. נתונה מערכת משוואות: $\begin{cases} f(x,u,v) = 0 \\ g(y,u,v) = 0 \\ h(z,u,v) = 0 \end{cases}$

א. נסחו תנאים מספיקים על מנת ש- z, u, v יהיו מוגדרים כפונקציות סתומות של x, y בראשית.

ב. בתנאי סעיף א', הוכיחו: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_x}{h_z} \cdot \frac{\frac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$ כאשר $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_u \end{pmatrix}$.

פתרון:

א. על פי תנאי משפט הפונקציה הסתומה, התנאים להלן מספיקים:

1. מערכת המשוואות מתקיימת בראשית: $f(0,0,0) = g(0,0,0) = h(0,0,0) = 0$
2. f, g, h רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות בסביבת הראשית.
3. הדטרמיננטה $\left.\left| \begin{matrix} f_z & f_u & f_v \\ g_z & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{matrix} \right| = h_z \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0 \right.$ ($T = $ f, g אינן תלויות ב- z. פיתחנו את הדטרמיננטה לפי עמודה ראשונה).

ב. נגזור את שלושת המשוואות לפי x ונקבל:

$$\begin{cases} f_x \cdot 1 + f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = 0 \\ g_u \cdot u_x + g_v \cdot v_x = 0 \\ h_z \cdot z_x + h_u \cdot u_x + h_v \cdot v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = -f_x \\ g_u \cdot u_x + g_v \cdot v_x = 0 \\ h_z \cdot z_x + h_u \cdot u_x + h_v \cdot v_x = 0 \end{cases}$$

כיוון שהנגזרות החלקיות של f, g, h קיימות ורציפות בראשית, קיבלנו מערכת משוואות בשלושה נעלמים (z_x, u_x, v_x). יש למערכת פתרון יחיד אמ"ם דטרמיננטת המקדמים:

$\left| \begin{matrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{matrix} \right| = h_z \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \neq 0$, שזה תנאי 3 של סעיף א'.

נשתמש בכלל קרמר ונמצא הפתרון עבור משתנה z_x:

$$z_x = \left| \begin{matrix} -f_x & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ 0 & h_u & h_v \end{matrix} \right| \Bigg/ \left| \begin{matrix} 0 & f_u & f_v \\ 0 & g_u & g_v \\ h_z & h_u & h_v \end{matrix} \right| = \frac{-f_x \frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)}}{h_z \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} = \frac{f_x}{h_z} \frac{\frac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

.6

א. חשבו $\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ כאשר D_R הוא מעגל ברדיוס R סביב הראשית.

ב. חשבו $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ (רמז: היעזרו בסעיף א').

פתרון:

א. $$\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R e^{-r^2}\cdot rdr = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

ב. נתבונן במלבן M_R שאורך צלעו $2R$ סביב הראשית. מחד מלבן זה מכיל את המעגל ברדיוס R סביב הראשית, מאידך מוכל במעגל ברדיוס $2R$ סביב הראשית. כיוון ש- $e^{-(x^2+y^2)}$ חיובית, נקבל כי:

$$\pi\left(1-e^{-R^2}\right) = \iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint\limits_{M_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint\limits_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi\left(1-e^{-4R^2}\right).$$

לכן, כאשר $R\to\infty$, נקבל על פי סנדוויץ': $\lim\limits_{R\to\infty}\iint\limits_{M_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$.

אולם, M_R הוא מלבן, ניתן להפריד את $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}e^{-y^2}$ ולקבל:

$$\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{M_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_{-R}^{R} e^{-y^2}dy = \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2}dt\right)^2 = \pi.$$

מכאן ומחיוביות e^{-t^2} נקבל: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

.7

א. חשבו $\iint\limits_{D_R}(x^2+y^2)dxdy$ כאשר $D_R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2\right\}$ תוך שימוש במשפט פוביני (ללא שימוש בקואורדינאטות קוטביות).

ב. חשבו $\iint\limits_{D}\frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}dxdy$ כאשר $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-x\le y\le 4-x,\ 4x^3\le y\le 16x^3\right\}$.

פתרון:

א.

$$\iint\limits_{D_R}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{-R}^{R}du\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_{-R}^{R}\left[\frac{x^2}{3}+y^2x\right]_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}dy=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}\left[\frac{2\left(R^2-y^2\right)^{3/2}}{3}+2\sqrt{R^2-y^2}\,y^2\right]dy=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}\left[\frac{2R^3\left(1-\left(\frac{y}{R}\right)^2\right)^{3/2}}{3}+2R^3\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2}\left(\frac{y}{R}\right)^2\right]dy$$

עתה נגדיר $\frac{y}{R}=\sin\theta$ (זה נכון כי $-R\le y\le R$), לכן $dy=R\cos\theta d\theta$:

$$\iint\limits_{D_R}(x^2+y^2)dxdy=R^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\cos^4\theta+2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)d\theta=$$

$$=R^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{6}\left(1+\overbrace{2\cos2\theta}^{\text{integrates to 0}}+\cos^2 2\theta\right)+\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2\theta\right)\right)d\theta=$$

$$=R^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\overbrace{\frac{\cos4\theta}{12}}^{\text{integrates to 0}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\overbrace{\frac{\cos4\theta}{4}}^{\text{integrates to 0}}\right)d\theta=R^4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}d\theta=\frac{\pi R^4}{2}$$

ב. נעבור לקואורדינאטות $u=x+y,\ v=\frac{y}{x^3}$. לפי $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3y/x^4 & 1/x^3\end{vmatrix}=\frac{3y+x}{x^4}$.

משפט: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{x^4}{3y+x}$. התחום עובר ל- $D=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le u\le 4,\ 4\le v\le 16\right\}$.

נשתמש בפוביני ונקבל: $\iint\limits_{D}\frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}dxdy=\int\limits_{1}^{4}du\int\limits_{4}^{16}\frac{x+3y}{x^4}\frac{x^4}{3y+x}e^{v}dv=3\left(e^{16}-e^{4}\right)$

8. חשבו את האינטגרל $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ בעמצאות מעבר לקואורדינטות גליליות או כדוריות כאשר פונקציה $f(x,y,z)$ ותחום V (המשטחים המגבילים):

א. $V: x^2+y^2+z^2=R^2\ ,\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

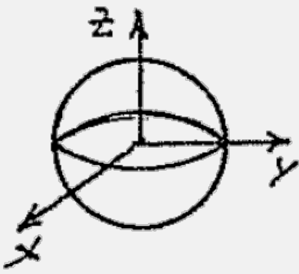
ב. $V: z^2=x^2+y^2\ (z\ge 0),\ \ z=h\ ,\ f(x,y,z)=z$

ג. $V: 2z=x^2+y^2,\ \ z=2\ ,\ f(x,y,z)=x^2+y^2$

ד. $V: x^2+y^2+z^2=1\ ,\ f(x,y,z)=\sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

פתרון:

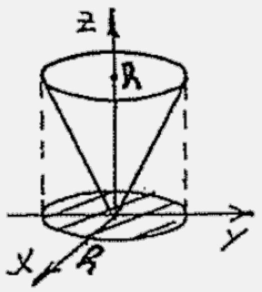
א. נעבור לקואורדינאטות כדוריות:



$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^R r\cdot r^2dr=4\cdot 2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)d\theta\int_0^R r^3dr=$$

$$=8\left(\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)d\theta\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right)=-\pi R^4\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}=\pi R^4$$

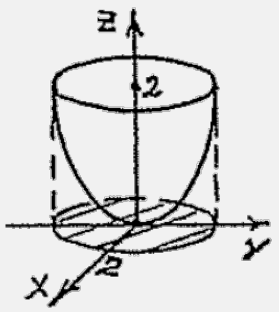
ב. $\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z=h\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=h^2$.



נעבור לקואורדינאטות גליליות: $I=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^h rdr\int_r^h zdz=$

$$=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^h(h^2r-r^3)dr=\pi\left(h^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R=\frac{\pi R^4}{4}$$

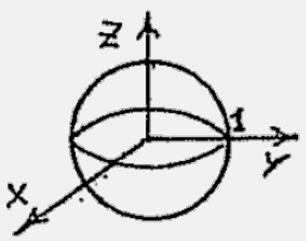
ג. $\begin{cases}2z=x^2+y^2\\ z=2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=4$. נעבור לקואורדינאטות גליליות:



$$I=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 rdr\int_{r^2/2}^2 r^2dz=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^2 r^3dr\left(z\Big|_{r^2/2}^2\right)=$$

$$=2\pi\int_0^2\left(2r^3-\frac{r^5}{2}\right)dr=2\pi\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}\pi$$

ד. נעבור לקואורדינאטות כדוריות:



$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int_0^1\sqrt{1+r^3}\cdot r^2dr=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\sqrt{1+r^3}\,d(1+r^3)\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left((1+r^3)^{3/2}\right)\Big|_0^1\cdot\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\pi R^4\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{8\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

.9

א. כתבו את משוואות של מישורי המשיק P_1, P_2, P_3 למשטח $z = Ax^2 + By^2$ בנקודות $p_1 = \binom{0}{0},\ p_2 = \binom{a}{0},\ p_3 = \binom{0}{b}$ ומצאו את הנקודה $q = P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

ב. מצאו את הנפח של טטראדר בעל קודקודים: $q,\ p_1,\ p_2,\ p_3$.

פתרון:

א. בנקודה כללית $\begin{pmatrix} u \\ v \\ Au^2 + Bv^2 \end{pmatrix}$ המשוואה של מישור המשיק למשטח הנתון, $Ax^2 + By^2 - z = 0$, הינה: $\begin{pmatrix} 2Au & 2Bv & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ Au^2 + Bv^2 \end{pmatrix} = 0$.

נכתוב את המשוואות מישורי המשיק עבור P_1, P_2, P_3:

$$P_1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ ,\quad P_2 : \begin{pmatrix} 2Au & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z - Aa^2 \end{pmatrix} = 0 \ ,\quad P_3 : \begin{pmatrix} 0 & 2Bb & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-b \\ z - Bb^2 \end{pmatrix} = 0$$

נפתח את המשוואות ונמצא את נקודת החיתוך: $\begin{cases} z = 0 \\ 2aAx - z = Aa^2 \\ 2bBy - z = Bb^2 \end{cases}$.

מכאן: $q = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ב. נפח של טטראדר: $V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} a & 0 & a/2 \\ 0 & b & b/2 \\ a^2A & b^2B & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{ab}{12}\left(Aa^2 + Bb^2\right)$.

10. מצאו משוואת מרחב משיק של:

א. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2,\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4-4\right)=0$ בנק' $p=(1,0,1,0)$.

ב. $f(x_1,x_2)=\left(x_2,\ x_1,\ x_1x_2,\ x_2^2-x_1^2\right)$ בנק' $p=(1,2)$.

פתרון:

א. נמצא את $Df(p)$: $Df(p)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$. מרחב המשיק במקרה זה יהיה גרעין של $Df(p)$, כלומר יש למצוא את הפתרון של: $\begin{pmatrix}2 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0$.

משוואת המישור: $M=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}t_2 \;\middle|\; t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$

ב. $Df(p)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. תמונה של $Df(p)$ היא תת-מרחב של $\mathbb{R}^4$ שנוצר ע"י עמודות של $Df(p)$, כלומר $L_p=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$. משוואת המישור:

$$M=f(p)+L_p=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-2\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\4\end{pmatrix}t_2 \;\middle|\; t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$$