תרגיל 3 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. חשבו את הגבולות הבאים:

1.1 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$

פתרון: נסמן $a_n = n^2$ ונשתמש בכלל המנה.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=1$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$.

1.2 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2 n!}{(5n+3)}}$

פתרון: נסמן $a_n=\frac{n^2 n!}{(5n+3)}$ ונשתמש בכלל המנה.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2(n+1)!}{(5n+8)}}{\frac{n^2 n!}{(5n+3)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n+1)!}{(5n+8)}\cdot\frac{(5n+3)}{n^2 n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+3)}{(5n+8)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+3)}{(5n+8)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}="1\cdot1\cdot\infty"=\infty$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2 n!}{(5n+3)}}=\infty$

1.3 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

פתרון: נסמן $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(2n)!}{n!n!}$ ונשתמש בכלל המנה.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}=4$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=4$.

.1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}$

פתרון: נגדיר $a_n=\frac{10^n}{n!}$ ונשתמש במשפט המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{(n+1)}=0<1$$

לכן, לפי משפט המנה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$.

.1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

פתרון: נגדיר $a_n=\frac{n!}{n^n}$ ונשתמש במשפט המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}=\left(e^{-1}\right)^1=\frac{1}{e}<1$$

לכן, לפי משפט המנה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

.1.6 $\lim\limits_{n->\infty}\frac{(2n)^n}{n!}$

נסמן $a_n=\frac{(2n)^n}{n!}$ ונשתמש בכלל המנה.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2n)^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(2n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(2n+2)^{n+1}}{(2n)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}\cdot\frac{(2n+2)^n(2n+2)}{(2n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)}{(n+1)}\cdot\frac{(2n+2)^n}{(2n)^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2e>1$$

לכן, לפי משפט המנה, $\lim\limits_{n->\infty}\frac{(2n)^n}{n!}=\infty$

.2 בדקו מונוטוניות וחסימות של הסדרות הבאות. כשניתן, הסיקו מסקנות לגבי התכנסותן.
הערה: גם כאשר סדרה היא מונוטונית החל מאיבר מסויים יש לציין זאת, על אף שאין צורך לציין

את האיבר המדוייק ממנו היא מונוטונית.

2.1. $a_n = \frac{n-1}{n}$

מונוטוניות: נחשב

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

לכן, $a_{n+1} > a_n$ לכל n והסדרה מונוטונית עולה.

חסימות: הסדרה מונוטונית עולה ולכן בהכרח חסומה מלמטה. מצד שני, לכל n $a_n = \frac{n-1}{n} < 1$ (כי המונה קטן מהמכנה), לכן הסדרה חסומה גם מלמעלה ובסה"כ חסומה.

מסקנה: מכיוון שהסדרה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת במובן הצר.

2.2. $a_n = \frac{\sqrt{3n}+5}{\sqrt{2n}+1}$

מונוטוניות: נגדיר $f(x) = \frac{\sqrt{3x}+5}{\sqrt{2x}+1}$ ונבדוק את תחומי העליה והירידה של הפונקציה בתחום $x \ge 1$.

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}(\sqrt{2x}+1) - \frac{2}{2\sqrt{2x}}(\sqrt{3x}+5)}{(\sqrt{2x}+1)^2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 5\frac{2}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 5\frac{2}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}+1)^2} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{10}{2\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x}+1)^2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{2\sqrt{6x}}}{(\sqrt{2x}+1)^2} = \frac{3\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{2\sqrt{6x}(\sqrt{2x}+1)^2} < 0$$

כלומר, $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום $x \ge 1$ (ואפילו בכל תחום הגדרתה). לכן הסדרה a_n מונוטונית יורדת ממש.

חסימות: הסדרה מונוטונית יורדת ולכן בהכרח חסומה מלעלה. מצד שני, כל אברי הסדרה חיוביים ולכן הסדרה חסומה מלמטה ע"י אפס. בסה"כ הסדרה חסומה.

מסקנה: הסדרה מונוטונית וחסומה לכן מתכנסת במובן הצר.

2.3. $a_n = n^5 e^{-n}$

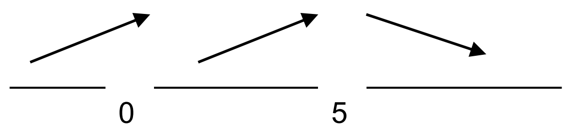
מונוטוניות: נגדיר $f(x) = x^5 e^{-x}$ ונבדוק את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f'(x) = 5x^4 e^{-x} - x^5 e^{-x} = 0$$

$$x^4 e^{-x}(5-x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 5$$

נבדוק תחומי עליה וירידה ע"י הצבה בנגזרת הראשונה:



לכן, הסדרה אינה מונוטונית אבל היא מונוטונית יורדת החל מהאיבר החמישי.
חסימות: הסדרה מונוטונית יורדת לבסוף ולכן בהכרח חסומה מלעלה. מצד שני, כל אברי הסדרה חיוביים ולכן הסדרה חסומה מלמטה ע"י אפס. בסה"כ הסדרה חסומה.
מסקנה: הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת במובן הצר.

2.4. $a_n = -\frac{n^2+1}{n^2} + 2n$

מונוטוניות: נחשב

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2} + 2(n+1) - \left(-\frac{n^2+1}{n^2} + 2n\right) = -1 - \frac{1}{(n+1)^2} + 2n + 2 + \frac{n^2+1}{n^2} - 2n$$

$$= -1 - \frac{1}{(n+1)^2} + 2n + 2 + 1 + \frac{1}{n^2} - 2n = 2 + \frac{1}{n^2} - \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{<1} > 0$$

לכן, $a_{n+1} > a_n$ והסדרה מונוטונית עולה.

חסימות: $a_n = -\frac{n^2+1}{n^2} + 2n = -1 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{<1} + 2n > -1-1+2n = 2n-2 = 2(n-1) \to \infty$

לכן, a_n אינה חסומה מלמעלה ובפרט אינה חסומה
מסקנה: הסדרה מונוטונית עולה אך אינה חסומה ולכן מתכנסת לאינסוף.

3. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות במובן הצר:

3.1. $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

פתרון: נראה כי הסדרה מונוטונית חסומה:
מונוטוניות: $a_n > 0$ לכל n. נחשב:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < 1$$

לכן $a_{n+1} < a_n$ לכל n ו a_n סדרה מונוטונית יורדת.
חסימות: מכיוון שהסדרה מונוטונית יורדת היא בהכרח חסומה מלמעלה. מצד שני, כל אברי הסדרה חיוביים ולכן היא חסומה מלמטה ע"י אפס. לכן הסדרה חסומה.
מכיוון שהסדרה הנתונה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת במובן הצר.

3.2. $a_n = \frac{12}{1}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{16}{7}\cdot\frac{2n+10}{3n-2}$

פתרון: נבדוק מונוטוניות וחסימות של הסדרה.
מונוטוניות: $a_n > 0$ לכל n. נחשב:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{12}{1}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{16}{7}\cdot\frac{2n+10}{3n-2}\cdot\frac{2n+12}{3n+1}}{\frac{12}{1}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{16}{7}\cdot\frac{2n+10}{3n-2}}=\frac{2n+12}{3n+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{3}$$

מכיוון ש $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$ החל מאינדקס מסויים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, לכן בחל מאינדקס מסויים $a_{n+1}<a_n$ ו a_n סדרה מונוטונית יורדת לבסוף.

חסימות: מכיוון שהסרה מונוטונית יורדת לבסוף היא בהכרח חסומה מלמעלה. מכיוון שכל איברי הסדרה חיוביים היא חסומה מלמטה ע"י אפס. לכן, בסה"כ הסדרה חסומה.
מכיוון שהסדרה מונוטונית לבסוף וחסומה היא מתכנסת במובן הצר.

3.3. $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+2}$

פתרון: נבדוק מונוטוניות וחסימות של הסדרה:
מונוטוניות:

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=\frac{2}{2n}-\frac{1}{n}=0$$

לכן $a_{n+1}<a_n$ לכל n ו a_n סדרה מונוטונית יורדת.

חסימות: מכיוון שהסרה מונוטונית יורדת היא בהכרח חסומה מלמעלה. מכיוון שכל איברי הסדרה חיוביים היא חסומה מלמטה ע"י אפס. לכן, בסה"כ הסדרה חסומה.
מכיוון שהסדרה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת במובן הצר.

4. חשבו את הגבולות הבאים:

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}$

פתרון: נסמן: $a_n=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ ו $b_n=n^4$ ונשים לב: b_n סדרה מונוטונית עולה ממש השואפת לאינסוף. לכן, ניתן להשתמש במבחן שטולץ. נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3)-(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)}{(n+1)^4-n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+1)^4-n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^4+4n^3+6n^2+4n+1-n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{4n^3+6n^2+4n+1}=\frac{1}{4}$$

מכיוון שהתקבל גבול, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ כלומר: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}=\frac{1}{4}$

4.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+e\cdot a_2+e^2\cdot a_3+\ldots+e^{n-1}a_n}{e^n}$ אם נתון ש $\lim\limits_{n\to\infty}e^na_n=2$

פתרון: נסמן: $x_n=a_1+e\cdot a_2+e^2\cdot a_3+\ldots+e^{n-1}a_n$ ו $y_n=e^n$ ונשים לב: y_n סדרה מונוטונית עולה ממש השואפת לאינסוף. לכן, ניתן להשתמש במבחן שטולץ. נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+e\cdot a_2+e^2\cdot a_3+\ldots+e^{n-1}a_n+e^na_{n+1})-(a_1+e\cdot a_2+e^2\cdot a_3+\ldots+e^{n-1}a_n)}{e^{n+1}-e^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^na_{n+1}}{e^{n+1}-e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^na_{n+1}}{e^n(e-1)}$$

נחשב $\lim\limits_{n\to\infty}e^na_{n+1}$, באמצעות הנתון $\lim\limits_{n\to\infty}e^na_n=2$:

$$\lim_{n\to\infty}e^na_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}a_{n+1}}{e}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}e^{n+1}a_{n+1}}{e}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}e^na_n}{e}=\frac{2}{e}$$

לכן, $0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overbrace{e^na_{n+1}}^{\to 2e^{-1}}}{\underbrace{e^n(e-1)}_{\to\infty}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ ולפי משפט שטולץ, הגבול הנתון שווה לאפס.

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$

פתרון: נחשב $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$ ונשים לב,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}}$$

בהנחה שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$ קיים.

נסמן: $a_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$ ו $b_n=n$ ונשים לב: b_n סדרה מונוטונית עולה ממש השואפת לאינסוף. לכן, ניתן להשתמש במבחן שטולץ. נחשב:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n+1})-(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n})}{n+1-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n+1}\underset{\lim\sqrt[n]{n}=1}{=}1$$

לכן, לפי משפט שטולץ, $1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

לכן $1=\frac{1}{1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$

בהצלחה! ☺