בוחן אלגברה לינארית 83110

31.12.12 / י"ח טבת התשע"ג

הנחיות:
ענו על כל השאלות. כל שאלה שווה 33 נקודות (סה"כ 3×33 + נק' בונוס=100).
זמן: שעה וחצי. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. מתרגלים: גיא לנדסמן, גילי גולן, אחיה בר־און

.1

(א) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. מצאו בסיסים ומימדים ל־4 המרחבים היסודיים שלה. (24 נק')

(ב) הוכח/הפרך:קיימת מטריצה A כך שהקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב העמודות שלה והקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב האפס שלה. (כלומר מצא מטריצה A כנ"ל או הוכח שלא קיימת A כנ"ל). (9 נק')

.2

(א) יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. הגדירו תת מרחב של V ונסחו את הקריטריון המקוצר לבדיקה האם תת קבוצה היא תת מרחב. (8 נק')

(ב) יהי $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ מרחב המטריצות הריבועית מגודל $n \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.
נגדיר $W := \{A \in V \mid A^t = -A\}$ קבוצת המטריצות האנטי־סימטריות. הוכח כי W הינו תת מרחב של V. (15 נק')

(ג) מצא את המימד של W (כלומר מצא $dim_{\mathbb{F}} W$). (10 נק')

.3

(א) יהא $V = \mathbb{C}^3$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

נניח $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in span(S)$ אילו יחסים קימיים בין a, b, c? (16 נק')

(ב) יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A, B \subset V$. הוכח $span(A \cup B) = span(A) + span(B)$ (17 נק')
(תזכורת: יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $A, B \subset V$. אזי $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$)

בהצלחה!

פתרון

.1

(א) **בסיס למרחב השורה:** נדרג את המטריצה. הדירוג לא משפיע על מרחב השורה.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $\{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ $R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ מכיוון שהקבוצה $\{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\}$ בת"ל היא מהווה בסיס למרחב השורות. בפרט מימד מרחב השורות הוא 2.

בסיס למרחב העמודות: עמודות הצירים במטריצה המדורגת הן העמודה הראשונה והשלישית לכן העמודות המתאימות במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודות. כלומר $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ בסיס למרחב העמודות והמימד הוא 2 .

בסיס למרחב האפס: דירוג המטריצה לא משפיע על מרחב האפס שלה. נמצא את מרחב האפס של המטריצה המדורגת. כלומר נפתור את המערכת $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. נציב $x_4 = s$ מהשורה השניה נקבל $x_3 + 2s = 0 \Leftarrow x_3 = -2s$. נציב $x_2 = t$ ומהשורה הראשונה נקבל $x_1 - 2t + 2(-2s) + 3s = 0$ $\Leftarrow x_1 = 2t + s$ לכן

$$N(A) = \{\begin{pmatrix} 2t+s \\ t \\ -2s \\ s \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\} = \{t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{R}\} = span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

מכיוון ש $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ בת"ל, זהו בסיס למרחב האפס. בפרט מימד מרחב האפס הוא 2.

בסיס למרחב האפס השמאלי: נעבור A^t ונמצא את כל הפתרונות למערכת ההומגנית $A^t x = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב $x_3 = t$ מהשורה השניה נקבל $x_2 + 5t = 0 \Leftarrow x_2 = -5t$ ומהשורה הראשונה נקבל $x_1 + 2(-5t) - 3t = 0$ $\Leftarrow x_1 = 13t$. לכן $N(A^t) = \{\begin{pmatrix} 13t \\ -5t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \{t\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = span\{\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ מכיוון שהקבוצה $\{\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ בת"ל היא מהווה בסיס למרחב האפס השמאלי. בפרט המימד שלו הוא 1.

(ב) נוכיח כי לא קיימת מטריצה כנ"ל. נניח בשלילה כי קיימת A כנ"ל. אזי לפי הנתון, אורך כל עמודה (כלומר, מספר השורות במטריצה) הוא 4. בדומה־ כל וקטור במרחב האפס הוא באורך 3 ולכן מספר העמודות במטריצה הוא 3. בסה"כ A היא מטריצה 4×3. לפי משפט $dim\, N(A) + dim\, R(A) = 3$ אבל לפי נתון $dim\, N(A) = 1$, $dim\, R(A) = dim\, C(A) = 1$ ולכן נקבל $1 + 1 = 3$ סתירה.

.2

(א) הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ יקרא תת מרחב אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות V.

כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק

i. לכל $w, u \in W$ מתקיים

א'. מוגדרות $u + w \in W$.

ב'. איבר נטרלי 0 של V נמצא ב־W

ii. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים

א'. מוגדרות $\alpha w \in W$

(ב) יהיו $A, B \in W$, $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $A^t = -A,\ B^t = -B$ ומתקיים:

i. $(A+B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A+B) \Leftarrow A + B \in W$

ii. $0^t_{n\times n} = -0_{n\times n} \Leftarrow 0 \in W$

iii. $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -\alpha A = -(\alpha A) \Leftarrow \alpha A \in W$.

(ג)

$$W = \{A \in V \mid A^t = -A\} = \{\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ -\alpha_{1,1} & 0 & \alpha_{2,1} & \cdots & a_{2,n-2} \\ \alpha_{1,2} & -\alpha_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-1,1} \\ -\alpha_{1,n-1} & -a_{2,n-2} & \cdots & -a_{n-1,1} & 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$span\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}, \}$$

ובפרט המימד של W הוא $\frac{n^2-n}{2}$ (כל איברי המטריצה הוא n^2 פחות n אברי האלכסון לחלק ל 2 בגלל האנטי סיטריות)

.3

(א) נדרג את המטריצה $A = \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 1 & a \\ 1 & i & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 1 & a \\ 1 & i & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 1 & a \\ 0 & i & i & b+ai \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 1 & a \\ 0 & i & i & b+ai \\ 0 & 0 & 0 & c+bi-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i & -ai \\ 0 & 1 & 1 & -bi+a \\ 0 & 0 & 0 & c+bi-a \end{array}\right)$$

למערכת שמצאנו יש פתרון אמ"מ $c+bi-a=0$ כלומר $a=c+bi$.

(ב) הוכחה: $(\supseteq)$ יהא $x \in span(A)+span(B)$ אזי $x=x_A+x_B$
כאשר $x_A \in span(A), x_B \in span(B)$.
לפי הגדרה $x_A=\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i a_i,\ x_B=\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i b_i$ כאשר α_i,β_i סקלארים ו $a_i \in A, b_i \in B$.
לכן $x=\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i a_i+\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i b_i$ כלומר צ"ל של איברים מ $A\cup B$ ולכן $x \in span(A\cup B)$.
$(\subseteq)$יהא $x \in span(A\cup B)$ אזי $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ כאשר $v_i \in A\cup B$. כלומר
לכל i מתקיים $v_i \in A$ או $v_i \in B$
נסדר ע"י החלפת אינדקסים את כל $v_i \in A$בהתחלה (נניח $1 \le i \le l$)
ואת כל ה $v_i \in B$ בסוף (נניח $l+1 \le i \le n$)
ואז $x=\sum\limits_{i=1}^{l}\alpha_i v_i+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\alpha_i v_i \in span(A)+span(B)$.■