

תרגיל 7

1. יהי p איבר ראשוני ו- x חבר של p . הוכיחו ש- x ראשוני נניח ש- $ab \mid x$. כלומר, קיים y כך ש- $xy = ab$. מכיוון ש- $x = up$ עבור u הפיך כלשהו, אז $puy = ab$. בפרט, p מחלק את ab . ראשוני ולכן בה"כ $a \mid p$. כלומר, קיים c כך ש- $pc = a$ אז $xu^{-1}c = a$, כלומר, $x \mid a$, מש"ל.

2. יהי x איבר אי פריק ו- a איבר לא הפיך שמחלק את x . הוכיחו ש- a חבר של x .
 $a = xy$ מכיוון ש- a איפריק אחד מהם הפיך. נתון ש- x לא הפיך, לכן y הפיך. מכאן ש- a חבר של x .

3. מצאו את כל החברים של 17 בחוג \mathcal{O}_{-2} .
 פתרון:

נוכיר שאיבר a הוא חבר של 17 אם"ם קיים איבר הפיך u כך ש- $a = 17u$. לכן מספיק למצוא את כל האיברים ההפיכים בחוג \mathcal{O}_{-2} . איבר בחוג הזה הוא מהצורה $x + y\sqrt{-2}$. הוא הפיך אם"ם הנורמה שלה היא ± 1 . הנורמה של $x + y\sqrt{-2}$ היא $x^2 + 2y^2$. זה אף פעם לא שווה -1 . וקל לראות שווה 1 רק עבור ± 1 . לכן החברים של 17 הם רק ± 17 .

4. קבעו האם $3 + \sqrt{-5}$ פריק בחוג \mathcal{O}_{-5} .
 פתרון:

ראשית, נשים לב ש- $N(3 + \sqrt{-5}) = 14$. אם $3 + \sqrt{-5} = xy$ פירוק אמיתי, כלומר x ו- y אינם הפיכים, אז $N(x)N(y) = 14$ וכן אף אחד לא מנורמה ± 1 (כי אחרת היה הפיך), לכן אחד מנורמה ± 2 , ואחד מנורמה ± 7 . יהי $x + y\sqrt{-5} \in \mathcal{O}_{-5}$. הנורמה שלו היא $x^2 + 5y^2$. נראה שהנורמה לא יכולה לצאת ± 2 . ובכן, נניח ש- $x^2 + 5y^2 = \pm 2$. אז מודולו 5 נקבל $x^2 \equiv 2 \vee 3 \pmod{5}$. נשים לב שהמספרים הריבועיים היחידים ב- \mathbb{Z}_5 הם 1, 4. לכן לא קיים איבר עם נורמה ± 2 . מכאן ש- $3 + \sqrt{-5}$ לא פריק.

5. הוכיחו: מספר ראשוני $p \in \mathbb{Z}$ הוא פריק ב- \mathcal{O}_D אם"ם יש איבר $x \in \mathcal{O}_D$ כך ש- $N(x) = \pm p$.
 פתרון:

ראשית, נניח שקיים x עם נורמה $\pm p$. אז x לא הפיך (כי הנורמה שלו שונה מ-1), וכן \bar{x} לא הפיך (מאותה סיבה), ונשים לב $(\pm 1)x\bar{x} = p$. לכן p פריק.

מצד שני, נניח ש- p פריק. קיימים x, y לא הפיכים כך ש- $xy = p$. לכן $N(x)N(y) = N(p) = p^2$. אבל $N(x) \neq \pm 1$ כי הוא לא הפיך. לכן $N(x) = \pm p$.