

פתרון תרגיל בית 18 – לוגיקה

לכל אורך התרגיל נשתמש במילון הבא:

[שימו לב שבחלק מההצטרנות מופיעים שמות פרטיים. הוסיפו אותיות מתאימות למילון. למשל, אם מופיע השם "עדי", הוסיפו את הערך " a -עדי" למילון והצרינו בהתאם.]

מילון

$x - Px$ אדם

$x - Bx$ בחינה

$x - Hx$ חכם

$x - Nxy$ נכשל ב- y

$x - Lxy$ אוהב את y

$x - Dx$ הוא מת

$x - Mx$ הוא גבר

$x - Sx$ הוא סיפור

$x - Txy$ מספר את y

תרגיל 1

בתרגיל הנוכחי תחום הדיון הוא היוניברס (כל הדברים בעולם). לכן אם מדובר באנשים, אתם חייבים לציין במפורש (על-ידי שימוש בפרדיקט המתאים) שהמשתנה שלכם הוא אדם.

הצרינו את הטענות הבאות:

א. אנשים חכמים אינם נכשלים בבחינות.

$$\forall x((Px \wedge Hx) \rightarrow \forall y(Bx \rightarrow \neg Nxy))$$

ב. כל אדם שנכשל בבחינה אינו חכם (שימו לב שזה נכון לכל בחינה שהיא).

$$\forall x(Px \rightarrow \forall y((By \wedge Nxy) \rightarrow \neg Hx))$$

ג. ישנו אדם שלא נכשל באף בחינה.

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Bx \rightarrow \neg Nxy))$$

ד. אין אדם שלא נכשל באף בחינה.

$$\forall x(Px \rightarrow \exists x(By \wedge Nxy))$$

או באופן שקול: $\neg \exists x(Px \wedge \forall y(By \rightarrow \neg Nxy))$

ה. כל אדם שאוהב את עצמו אוהב מישהו.

$$\forall x((Px \wedge Lxx) \rightarrow \exists y(Py \wedge Lxy))$$

ו. כל אדם שאוהב את עצמו ואת דני, אוהב את שושנה.

$$\forall x((Px \wedge (Lxx \wedge Lxd)) \rightarrow Lxs)$$

ז. כל אדם שאוהב מישהו אוהב את עצמו.

$$\forall x((Px \wedge \exists y(Py \wedge Lxy)) \rightarrow Lxx)$$

ח. כל אדם שלא אוהב את עצמו לא אוהב אף אחד.

$$\forall x((Px \wedge \neg Lxx) \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \neg Lxy))$$

ט. כל מי שלא אוהב אף אחד, לא אוהב את עצמו.

$$\forall x((Px \wedge \forall y(Py \rightarrow \neg Lxy)) \rightarrow \neg Lxx)$$

י. כל אדם שאוהב את עדי, נאהב על-ידי דני.

$$\forall x((Px \wedge Lxa) \rightarrow Ldx)$$

יא. כל אדם שאוהב מישהו, נאהב על-ידיו.

$$\forall x(Px \rightarrow \forall y((Py \wedge Lxy) \rightarrow Lyx))$$

יב. כל מי שאוהב מישהו, נאהב על-ידי מישהו.

$$\forall x((Px \wedge \exists y(Py \wedge Lxy)) \rightarrow \exists z(Pz \wedge Lzx))$$

יג. גבר מת אינו מספר סיפורים.

$$\forall x((Mx \wedge Dx) \rightarrow \forall y(Sy \rightarrow \neg Txy))$$

יד. רק גברים מספרים סיפורים.

$$\forall x(\exists y(Sy \wedge Txy) \rightarrow Mx)$$

אפשרות נוספת:

$$\forall x \forall y((Sy \wedge Txy) \rightarrow Mx)$$

טו. רק גברים לא מתים מספרים סיפורים.

$$\forall x(\exists y(Sy \wedge Txy) \rightarrow (Mx \wedge \neg Dx))$$

(בסעיף הקודם)

טז. לכל גבר יש סיפור אותו הוא מספר.

$$\forall x(Mx \rightarrow \exists y(Sy \wedge Txy))$$

יז. לכל גבר חכם יש סיפור שאותו הוא אוהב.

$$\forall x((Mx \wedge Hx) \rightarrow \exists y(Sy \wedge Lxy))$$

יח. כל אדם המספר סיפור אוהב את הסיפור "הנסיכה הקסומה".

$$\forall x((Px \wedge \exists y(Sy \wedge Txy)) \rightarrow Lxn)$$

יט. כל אדם שאוהב סיפור כלשהו, מספר אותו.

$$\forall x(Px \rightarrow \forall y((Sy \wedge Lxy) \rightarrow Txy))$$

תרגיל 2

הצרינו מחדש את הטענות ה', ו', ז', ח' כאשר הפעם תחום הדיון הוא "בני אדם".

פתרון

ה. $\forall x(Lxx \rightarrow \exists yLxy)$

ו. $\forall x((Lxx \wedge Lxd) \rightarrow Lxs)$

ז. $\forall x(\exists yLxy \rightarrow Lxx)$

ח. $\forall x(\neg Lxx \rightarrow \forall y\neg Lxy)$

תרגיל 3

דוגמה

נתבונן בפסוק $\exists x(Ax \wedge Bx)$. נציע שתי אפשרויות לפרש את הפסוק הזה.

1. תחום הדיון: קבוצת בני האדם

$x - Ax$ הוא בלונדיני

$x - Bx$ שוקל יותר מ-50 ק"ג

לפי הפירוש הזה הפסוק אומר שקיים אדם בלונדיני ששוקל יותר מ-50 ק"ג, וערך האמת של הפסוק הוא אמת.

2. תחום הדיון: הדברים שיש לי בקלמר

$x - Ax$ הוא עפרון

$x - Bx$ הוא כחול

לפי הפרוש הזה הפסוק אומר שיש לי בקלמר עפרון כחול, וערך האמת של הפסוק הזה הוא שקב (כי אין לי עפרון כחול בקלמר!).

מה המסקנה של הסיפור? המסקנה היא שאם רוצים לדבר על **ערך האמת** של פסוק כלשהו, יש להגדיר היטב את תחום הדיון ואת המשמעות של כל פרדיקט (ושל כל קבוע, אם יש כאלה).

כעת התבוננו בפסוק $\forall x((Ax \wedge Cx) \rightarrow Bx)$. השלימו את הפרטים הבאים
פעמיים, כך שפעם אחת הפסוק יצא שקרי ופעם אחת יצא אמיתי.

- תחום הדיון: _____
- $x - Ax$ הוא _____
- $x - Bx$ הוא _____
- $x - Cx$ הוא _____

פתרון

פרוש שבו הפסוק אמיתי:

- תחום הדיון: אוסף של שני תפוחים, שני תפוזים ועגבניה
- $x - Ax$ הוא פרי
- $x - Bx$ הוא תפוז
- $x - Cx$ הוא כתום

פרוש שבו הפסוק שקרי:

- תחום הדיון: יוניברס
- $x - Ax$ הוא פרי
- $x - Bx$ הוא תפוז
- $x - Cx$ הוא כתום