

פתרון תרגיל 23 – לוגיקה 2014

תרגיל (תכונות של יחסים)

קבעו אילו מ-9 התכונות שלמדנו מקיים כל אחד מהיחסים הבאים:

(כל היחסים מוגדרים על התחום $D = \{1, 2, 3, 4\}$.)

$$I(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\} \quad \text{א.}$$

א-רפלקסיבי, א-סימטרי, טרנזיטיבי.

$$I(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\} \quad \text{ב.}$$

לא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

$$I(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\} \quad \text{ג.}$$

רפלקסיבי, לא סימטרי, טרנזיטיבי.

$$I(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\} \quad \text{ד.}$$

לא רפלקסיבי, לא סימטרי, לא טרנזיטיבי.

תרגיל (כללי גזירה-פרדיקטים)

מצאו את הטעויות בהוכחות הבאות (האות "p" מציינת שהשורה הנוכחית היא הנחה בטיעון):

[שימו לב שיכולה להיות יותר מטעות אחת בכל סעיף!]

א.

$$1. Sb \wedge Cb \quad p.$$

$$2. \forall x(Sx \wedge Cx) \rightarrow \neg \exists yFy \quad p.$$

$$3. (Sb \wedge Cb) \rightarrow \neg \exists yFy \quad 2, UI$$

$$4. \neg \exists yFy \quad 1, 3, M.P.$$

$$5. \neg Fa \quad 4, EI$$

$$6. \exists x \neg Fx \quad 5, EG$$

שורה 3: לא תקין שכן הכמת $\forall x$ אינו חל על שורה שלמה.

שורה 5: לא תקין שכן הכמת $\exists y$ אינו חל על כל השורה.

ב.

- | | | |
|----|---------------------------------|-----------|
| 1. | $(Aa \wedge Bb) \rightarrow Cc$ | $p.$ |
| 2. | $\forall x(Ax \wedge Bx)$ | $p.$ |
| 3. | $Aa \wedge Bb$ | 2, UI |
| 4. | Cc | 1,3, M.P. |
| 5. | $\forall xCx$ | 4, UG |

שורה 3: לא תקין שכן יש להחליף את כל המופעים של x באותו משתנה/קבוע.
 שורה 5: לא תקין שכן לא ניתן להכליל קבוע באמצעות כלל ההכללה האוניברסאלית (UG).

ג.

- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | $\forall x((Hx \wedge Kx) \rightarrow Mx)$ | $p.$ |
| 2. | $\exists x(Hx \wedge Kx)$ | $p.$ |
| 3. | $Hx \wedge Kx$ | 2, EI |
| 4. | Mx | 1,3, M.P. |
| 5. | $\exists xMx$ | 4, EG |

שורה 3: לא תקין שכן לאחר הפעלת EI יש להחליף את המשתנה בשם פרטי (קבוע).
 שורה 4: לא תקין שכן זו לא התבנית של מודוס פוננס.
 שורה 5: לא תקין שכן לא ניתן להשתמש ב-EI מכיוון ש- x הוא משתנה ולא קבוע.

ד.

- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $\forall x(Mx \rightarrow Gx) \rightarrow Fa$ | $p.$ |
| 2. | $\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Mx)$ | $p.$ |
| 3. | $\neg Gy \rightarrow \neg My$ | 2, UI |
| 4. | $\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Mx) \rightarrow Fa$ | 1, trans. |
| 5. | $(\neg Gx \rightarrow \neg Mx) \rightarrow Fa$ | 4, UI |
| 6. | Fa | 3,5, M.P. |
| 7. | $\forall xFx$ | 6, UG |

שורה 6: לא תקין שכן לא מתאים לתבנית של מודוס פוננס (הרישא לא זהה).
 שורה 7: לא תקין שכן לא ניתן להכליל קבוע באמצעות UG.

ה.

1. $\exists x(Fx \wedge \neg Mx)$ p .
2. $\forall x((Gx \vee Hx) \rightarrow Mx)$ p .
3. $(Ga \vee Ha) \rightarrow Ma$ 2, UI
4. $Fa \wedge \neg Ma$ 1, EI
5. $\neg Ma$ 4, $simp.$
6. $\neg(Ga \vee Ha)$ 3, 5, $M.T.$
7. $\exists x\neg(Gx \vee Hx)$ 6, EG

שורה 4: לא תקין שכן a כבר הופיע בהוכחה.

ו.

1. $\forall x\exists y((Fx \wedge Gy) \rightarrow Lxy)$ p .
2. $\exists y((Fz \wedge Gy) \rightarrow Lxy)$ 1, UI
3. $\exists y((Fy \wedge Gy) \rightarrow Lyy)$ 1, UI
4. $\exists y((Fx \wedge Gy) \rightarrow Lxy)$ 1, UI

שורה 2: לא תקין כי היינו חייבים להמיר את כל המופעים של x באותו משתנה/קבוע.

שורה 3: לא תקין כי x היה צריך להתחלף לקבוע או למשתנה חופשי וכאן החלפנו אותו ל- y ולכן הוא נשאר קשור.

ז.

1. $\exists xFx$ p .
2. $\exists xGx$ p .
3. Fa 1, EI
4. Ga 2, EI
5. $Fa \wedge Ga$ 3, 4, $conj.$
6. $\exists y(Fy \wedge Ga)$ 5, EG
7. $\exists z\exists y(Fy \wedge Gz)$ 6, EG

שורה 4: לא תקין כי a כבר הופיע בהוכחה.

שורה 6: לא תקין שכן היינו חייבים להמיר את כל המופעים של a באותו משתנה.