אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב– פתרון תרגיל בית מס' 4
העתקות לינאריות: גרעין, תמונה, חח"ע, על, משפט המימד להעתקות לינאריות

שאלה 1

יהי V מרחב המטריצות מסדר 2×2 מעל C. תהי $T: V \to V$ נתונה ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & a \end{pmatrix}$$

א. מצא בסיס לתמונה של T.

ב. מצא בסיס לגרעין של T.

ג. האם $V = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$? נמק.

ד. מצא מטריצה לא הפיכה, שאינה מטריצת האפס, הנמצאת בתמונה של T.

ה. האם המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ נמצאת בתמונה של T ? אם כן מצא את קבוצת כל המקורות של מטריצה זו, וקבע אם קבוצה זו מהווה תת-מרחב וקטורי של V; אם לא הסבר מדוע.

<u>פתרון</u>

א. כל איבר בתמונה של T ניתן לכתיבה כך:

$$\begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $a, b-c \in \mathbb{C}$. לכן הבסיס לתמונה של T הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

ומתקיים: $\mathrm{Im}\,T = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ (ניתן לבדוק בקלות שהקבוצה הנ"ל היא בת"ל).

ב. כל מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in KerT$ מקיימת:

$$T(A) = T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0, b = c, d \in \mathbb{C}$$

לכן צורה כללית של מטריצה בגרעין של T היא: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $b, d \in \mathbb{C}$ כלשהם.

מכאן, הבסיס לגרעין הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ומתקיים: $KerT = Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ג. כן, מכוון שכל מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ ניתנת להיכתב כך:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b-c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im} T} + \underbrace{\frac{b+c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (d-a)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in KerT}$$

לכן $V = \operatorname{Im} T + KerT$. בנוסף, אם מטריצה $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T \cap KerT$ אזי:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in KerT \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

מכאן יוצא, כי: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = d = 0 \\ b = -b = c \Rightarrow b = c = 0 \end{cases}$ לכן $x = y = z = w = 0$.

בסופו של דבר: $\operatorname{Im} T \cap KerT = \{0\}$ והטענה בסעיף נכונה.

ד. כל מטריצה בתמונה של T היא מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ עבור $a, b \in \mathbb{C}$ כלשהם.

מכוון שרוצים מטריצה לא הפיכה, נדרש כי: $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right| = a^2 + b^2 = 0$. אם נבחר, למשל $a = 1, b = i$ נקבל: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$ מטריצה, שאינה מטריצת האפס, שהיא לא הפיכה ונמצאת בתמונה של T.

ה. המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ נמצאת בתמונה של T, כי היא מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ עבור $a = 2, b = 3$.

כדי למצוא את קבוצת המקורות של מטריצה זו, נפתור:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-c \\ c-b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2, b-c = 3, d \in \mathbb{C}$$

לכן קבוצת המקורות המבוקשת היא:

$$T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & c+3 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

הקבוצה הנ"ל <u>אינה</u> תת-מרחב של V, למשל מהסיבה כי $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו שהטרנספורמציות הבאות הינן לינאריות. מצאו מהם הגרעין והתמונה שלהן וכן בסיס ומימד של הגרעין והתמונה. האם ההעתקה הנתונה היא על? חח"ע? הפיכה?

א. $T(x)=Ax$ $\quad T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ כאשר $A=\begin{bmatrix}1&0&2&-1&8\\2&1&-1&1&8\\-2&0&-5&3&-8\end{bmatrix}$.

<u>פתרון</u>

$T(x)=Ax$ $\quad T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$ היא הטרנספורמציה הנוצרת ע"י המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&0&2&-1&8\\2&1&-1&1&8\\-2&0&-5&3&-8\end{bmatrix}$ ולכן היא לינארית (עליכם לבדוק את תכונות הלינאריות כאן).

$$(x,y,z,s,t)\in\operatorname{Ker}T \iff T(x,y,z,s,t)=0 \iff \begin{bmatrix}1&0&2&-1&8\\2&1&-1&1&8\\-2&0&-5&3&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x\quad +2z-s+8t=0\\ 2x+y-z+s+8t=0\\ -2x\quad -5z+3s-8t=0\end{cases}$$

כלומר $\operatorname{Ker}T$ הוא מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית זו, ש A היא המטריצה המייצרת אותה.

$$\begin{bmatrix}1&0&2&-1&8\\2&1&-1&1&8\\-2&0&-5&3&-8\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&24\\0&1&0&-2&-48\\0&0&1&-1&-8\end{bmatrix}$$

האיברים הפותחים בצורה המדורגת הם בעמודות $1,2,3$ ולכן x,y,z משתנים תלויים, s,t משתנים חופשיים.

מהצורה המדורגת קנונית מתקבל $z=s+8t$, $y=2s+48t$, $x=-s-24t$.

הפתרון הכללי של המערכת הוא $(-s-24t,2s+48t,s+8t,s,t)$.

ולכן $\operatorname{Ker}T=\{(-s-24t,2s+48t,s+8t,s,t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$.

נמצא בסיס ל $\operatorname{Ker}T$. הפתרון הכללי הוא $(-s-24t,2s+48t,s+8t,s,t)=s(-1,2,1,1,0)+t(-24,48,8,0,1)$ ולכן בסיס למרחב הפתרונות, כלומר ל $\operatorname{Ker}T$, הוא $\{(-1,2,1,1,0),(-24,48,8,0,1)\}$. $\dim\operatorname{Ker}T=2$.

הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^5$ הוא: $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ ולכן

$$\operatorname{Im}T=Sp\{T(1,0,0,0,0),T(0,1,0,0,0),T(0,0,1,0,0),T(0,0,0,1,0),T(0,0,0,0,1)\}$$
$$=Sp\{(1,2,-2),(0,1,0),(2,-1,-5),(-1,1,3),(8,8,-8)\}$$

(שימו לב שוקטורים אלה, שפורשים את $\operatorname{Im}T$, הם בדיוק עמודות המטריצה A).

נמצא בסיס ל $\operatorname{Im}T$ בשיטת העמודות. נבנה מטריצה ש<u>עמודותיה</u> הן השלשות שפורשות את $\operatorname{Im}T$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & -5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

זו בדיוק המטריצה A שמייצרת את הטרנספורמציה T. כלומר $\operatorname{Im} T$ הוא מרחב העמודות של המטריצה A.

כבר דרגנו מטריצה זו, האיברים הפותחים בצורה המדורגת הם בעמודות $1,2,3$ ולכן בסיס של מרחב העמודות של המטריצה A, כלומר של $\operatorname{Im} T$, הוא $\{(1,2,-2)\,,(0,1,0)\,,(2,-1,-5)\}$.

$\dim \operatorname{Im} T = 3$.

מכיוון ש $\operatorname{Ker} T = \{(-s-24t, 2s+48t, s+8t, s, t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$ וזה שונה מתת-מרחב האפס של $\mathbb{R}^5$, נובע ש T אינה חד-חד-ערכית. הסבר אחר: $\dim \operatorname{Ker} T \neq 0$ ולכן $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$ ולכן T אינה חד-חד-ערכית.

$\operatorname{Im} T$ תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ו $\dim \operatorname{Im} T = 3$ ולכן $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$, כלומר T על.

מכאן, T אינה הפיכה (כי אינה חח"ע).

ב. $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$ $\quad T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

<u>פתרון</u>

אפשר לרשום: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) T$, ובדומה לסעיף א', זו העתקה לינארית.

אפשר למצוא את $\operatorname{Ker} T, \operatorname{Im} T$ בדומה לסעיף הקודם:

$\operatorname{Ker} T$ הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית ש B היא המטריצה המייצרת אותה.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

בכל עמודה יש איבר פותח ולכן כל המשתנים תלויים, אין משתנה חופשי. ולכן למערת זו קיים רק הפתרון הטריביאלי.

ולכן מרחב הפתרונות הוא $\{(0,0,0)\}$, כלומר $\operatorname{Ker} T = \{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Ker} T$ הוא תת-מרחב האפס של $\mathbb{R}^3$.

ולכן ל $\operatorname{Ker} T$ אין בסיס. $\dim \operatorname{Ker} T = 0$.

ומכאן T חד-חד-ערכית.

$\operatorname{Im} T$ הוא מרחב העמודות של המטריצה B המייצרת את T, כלומר $\operatorname{Im} T = Sp\{(1,0,1)\,,(1,1,0)\,,(0,1,1)\}$.

כבר דרגנו מטריצה זו, האיברים הפותחים בצורה המדורגת הם בעמודות $1,2,3$ ולכן בסיס של $\operatorname{Im} T$ הוא $\{(1,0,1)\,,(1,1,0)\,,(0,1,1)\}$. $\dim \operatorname{Im} T = 3$. $\operatorname{Im} T$ תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ו $\dim \operatorname{Im} T = 3$ ולכן $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$, כלומר T על.

בסה"כ T הפיכה וזה לא מקרי: אם ממד המרחב בתחום ובטווח ההעתקה זהה, ההעתקה היא חח"ע אם ורק אם היא על!

<u>שאלה 3</u>

א. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, המוגדרת ע"י: $T(x,y)=(2x-3y,\alpha x+\beta y)$
ומקיימת את התנאי: $KerT=\operatorname{Im}T$. מצאו (אם קיימים) את הערכים של α,β.
<u>פתרון</u>

ממשפט המימדים נובע: $\dim KerT+\dim\operatorname{Im}T=2\quad(1)$.
מצד שני, נתון כי $KerT=\operatorname{Im}T$, לכן: $\dim KerT=\dim\operatorname{Im}T\quad(2)$
מ(1) ו(2) יחד נובע כי: $\dim KerT=\dim\operatorname{Im}T=1$.
כעת נמצא <u>במפורש</u> את $KerT$ ואת $\operatorname{Im}T$:
$KerT$ הוא פתרון המערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases}2x-3y=0\\ \alpha x+\beta y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x\\ \alpha x+\beta y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x\\ \alpha x+\beta\cdot\frac{2}{3}x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x\\ \left(\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)x=0\end{cases}$$

מכוון ש$\dim KerT=1$, צריך להיות פתרון לא טריוויאלי למערכת הנ"ל (אחרת יהיה $\dim KerT=0$), ואז מקבלים את התנאי: $(*)\quad\alpha=-\frac{2}{3}\beta$ והגרעין יהיה:

$$KerT=Sp\{(3,2)\}$$

כעת נעבור למציאת $\operatorname{Im}T$: $\operatorname{Im}T=Sp\{T((0,1)),T((1,0))\}$ (שימו לב: $\{(1,0),(0,1)\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של תחום ההעתקה, $\mathbb{R}^2$). לכן:

$$\operatorname{Im}T=Sp\{(-3,\beta),(2,\alpha)\}\underset{\alpha=-\frac{2}{3}\beta\quad(*)}{=}Sp\{(-3,\beta)\}$$

(השתמשנו גם בהגדרת ההעתקה הנתונה).
כעת, מכוון שדורשים שוויון $KerT=\operatorname{Im}T$, יוצא: $Sp\{(3,2)\}=Sp\{(-3,\beta)\}$, ואז: $\beta=-2$
ולפי (*) מקבלים גם: $\alpha=\frac{4}{3}$.

<u>תשובה סופית</u>: $\beta=-2\ ,\ \alpha=\frac{4}{3}$

ב. האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_4[x]$ כך ש- $KerT=\operatorname{Im}T$? נמקו היטב.
<u>תזכורת</u>: $\mathbb{R}_4[x]$ הוא מרחב הפולינומים עם מקדמים ממשיים ממעלה ≤ 4.
<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שיש העתקה כזו. מכוון ש $\dim(\mathbb{R}_4[x])=5$ נקבל ממשפט המימדים:

$$\dim KerT+\dim\operatorname{Im}T=5\quad(1)$$

מצד שני, נתון כי $KerT=\operatorname{Im}T$, לכן: $\dim KerT=\dim\operatorname{Im}T\quad(2)$
מ(1) ו(2) יחד נובע כי: $\dim KerT=\dim\operatorname{Im}T=2.5$, וזו סתירה לכך שממד מרחב לינארי הוא מסי' טבעי (או 0).
סתירה זו מוכיחה, כי לא קיימת העתקה כנדרש.

שאלה 4

$T:\mathbb{R}_9[x]\to\mathbb{R}_9[x]$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $\text{null}\,T\cdot\text{rank}\,T=16$ וגם $\text{Ker}\,T\subseteq\text{Im}\,T$. חשבו את הערכים האפשריים של $\text{null}\,T$ ו $\text{rank}\,T$.

הערה: $\text{null}\,T$ הוא סימון מקובל ל $\dim\text{Ker}\,T$. $\text{rank}\,T$ הוא סימון מקובל ל $\dim\text{Im}\,T$.

פתרון

$T:\mathbb{R}_9[x]\to\mathbb{R}_9[x]$ ולכן:

$\text{Ker}\,T\subseteq\mathbb{R}_9[x]$ ולכן $0\le\dim\text{Ker}\,T\le 10$.

$\text{Im}\,T\subseteq\mathbb{R}_9[x]$ ולכן $0\le\dim\text{Im}\,T\le 10$.

כמו כן, לפי משפט המימד לטרנספורמציות לינאריות,

$\dim\text{Ker}\,T+\dim\text{Im}\,T=\dim\mathbb{R}_9[x]=10$.

נתון שמתקיים $\dim\text{Ker}\,T\cdot\dim\text{Im}\,T=16$.

כמו כן נתון $\text{Ker}\,T\subseteq\text{Im}\,T$ ולכן $\dim\text{Ker}\,T\le\dim\text{Im}\,T$.

הזוג היחיד של מספרים שלמים בין 0 ל 10 שסכומם 10 ומכפלתם 16 הוא $2,8$. מכיוון ש $\dim\text{Ker}\,T\le\dim\text{Im}\,T$ נובע שהאפשרות היחידה היא $\dim\text{Im}\,T=8$, $\dim\text{Ker}\,T=2$.

שאלה 5

יהי V מ״ו בעל ממד 3 ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^3=0$.

נניח כי קיים וקטור $v\in V$ כך ש-$T^2(v)\neq 0$.

א. הוכיחו כי הקבוצה $B=\{v,T(v),T^2(v)\}$ היא בסיס של V.

ב. הוכיחו כי $KerT\subset\text{Im}\,T$ (כלומר $KerT\underset{\neq}{\subseteq}\text{Im}\,T$).

פתרון

א. מכיוון שיש 3 וקטורים ב-B ו-$\dim V=3$, מספיק לבדוק שוקטורי B בת״ל.

נניח ש-: $\alpha v+\beta T(v)+\gamma T^2(v)=0$ (*). נפעיל את T על השוויון הזה

ונקבל: $\alpha T(v)+\beta T^2(v)+\gamma T^3(v)=0$ ובגלל הנתון $T^3=0$, יוצא: $\alpha T(v)+\beta T^2(v)=0$,

שוב נפעיל את T ונקבל: $\alpha T^2(v)=0$.

מכיוון שנתון $T^2(v)\neq 0$, נקבל $\alpha=0$. נציב $\alpha=0$ ב-(*) ונחזור על הפעולה הקודמת וכך בצורה דומה נקבל $\beta=0$ ו-$\gamma=0$ והקטורים של B בת״ל ו-B הוא בסיס ל-V.

ב. $\text{Im}\,T\neq V$ כי אם $\text{Im}\,T=V$ אז T איזומורפיזם (הפיכה), מה שסותר את הנתון $T^3=0$ (הרכבת איזומורפיזמים הוא גם איזומורפיזם). לכן $\dim\text{Im}\,T\le 2$. אך $\{T(v),T^2(v)\}\subseteq\text{Im}\,T$ גורר כי $\dim\text{Im}\,T\ge 2$ ולכן $\dim\text{Im}\,T=2$ ו-$\dim KerT=1$. ברור כי $Sp\{T^2(v)\}\subseteq KerT$ (כי $T\left(T^2(v)\right)=T^3(v)=0$), לכן $KerT=Sp\{T^2(v)\}$ ואז מתקבל ש-

$KerT=Sp\{T^2(v)\}\subset\text{Im}\,T$ (המרחבים שונים כי הם בעלי מימדים שונים).

שאלה 6

יהי V מ״ו בעל ממד סופי ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

א. הוכיחו כי $\operatorname{Im}T^2\subseteq\operatorname{Im}T$ וגם $Ker\,T\subseteq Ker\,T^2$.

<u>הוכחה</u>

תחילה נוכיח את ההכלה: $\operatorname{Im}T^2\subseteq\operatorname{Im}T$.
יהי $v\in\operatorname{Im}T^2$, אז קיים וקטור $u\in V$ כך ש- $T^2(u)=T(T(u))=v$. אם נסמן $w=T(u)$
נקבל: $T(w)=v$, ז״א $v\in\operatorname{Im}T$. משי״ל.
כעת נוכיח: $Ker\,T\subseteq Ker\,T^2$.
יהי $u\in KerT$, אז: $T(u)=0$. אם נפעיל את ההעתקה T על השוויון הזה, נקבל:
$0\underset{T\text{ is a linear transformation}}{=}T(0)=T^2(u)=T(T(u))$, לכן $u\in KerT^2$. משי״ל.

ב. הוכיחו כי שני התנאים הבאים שקולים:

$$(1)\quad \operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$$
$$(2)\quad Ker\,T=Ker\,T^2$$

(כלומר עליכם להוכיח ש(1) נכון אם ורק אם (2) נכון).

<u>הוכחה</u>

נניח כי $\dim V=n$, ו n הוא טבעי.
<u>כוון ראשון:</u> נניח כי $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$ ונוכיח כי $Ker\,T=Ker\,T^2$.
לפי משפט המימד מתקיים:

$$\dim\operatorname{Im}T+\dim KerT=n\underset{\operatorname{Im}T=\operatorname{Im}T^2}{\Rightarrow}\dim\operatorname{Im}T^2+\dim KerT=n\quad(*)$$

מצד שני, לפי משפט המימד עבור ההעתקה $T^2:V\to V$ מתקיים:

$$\dim\operatorname{Im}T^2+\dim KerT^2=n\quad(**)$$

לכן, מתוך (*) ו(**) מתקיים: $\dim KerT=\dim KerT^2$. אבל בסעיף א׳ קיבלנו ש-
$Ker\,T\subseteq Ker\,T^2$. לכן, $KerT$ הוא ת״מ של $KerT^2$, והם בעלי אותו ממד, לכן זהו אותו מרחב, כלומר: $Ker\,T=Ker\,T^2$.
<u>כוון שני:</u> נניח כי $Ker\,T=Ker\,T^2$ ונוכיח כי $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$.
לפי משפט המימד מתקיים:

$$\dim\operatorname{Im}T+\dim KerT=n\underset{KerT=KerT^2}{\Rightarrow}\dim\operatorname{Im}T+\dim KerT^2=n\quad(\#)$$

לכן, מתוך (#) ו(**) מתקיים: $\dim\operatorname{Im}T=\dim\operatorname{Im}T^2$. אבל בסעיף א׳ קיבלנו ש-
$\operatorname{Im}T^2\subseteq\operatorname{Im}T$. לכן, $\operatorname{Im}T^2$ הוא ת״מ של $\operatorname{Im}T$, והם בעלי אותו ממד, לכן זהו אותו מרחב,
כלומר: $\operatorname{Im}T^2=\operatorname{Im}T$.
משי״ל.
<u>שאלה למחשבה</u>: השתמשנו כאן באופן מפורש בכך, שמרחב V הוא בעל ממד סופי. האם הטענה נשארת נכונה עבור מרחב עם ממד אינסופי?

ג. הוכיחו כי אם אחד מהתנאים של סעיף ב׳ מתקיים, אזי: $\operatorname{Im}T\oplus Ker\,T=V$.