מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89-119 מועד א'

סמסטר א' תשע"ח

מרצה: איתמר שטיין

מתרגל: אחמד סלימאן.

תאריך: כ"ג שבט תשע"ח 8.2.18

משך המבחן: שלוש שעות.

הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4 שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה.

כל שאלה שווה 25 נקודות.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי פשוט בלבד.

יש לנמק היטב את תשובותיכם!

1. נתונה מערכת משוואות התלויה בפרמטר a.

$$x-2y+z=-1$$
$$2x+(a-4)y+az=0$$
$$-x+(a^2+a+2)y-z=1$$

לאילו ערכי a יש למערכת פתרון יחיד? אין פתרון? אינסוף פתרונות? במצבים של אינסוף פתרונות מצאו גם את הפתרון הכללי.

פתרון. נשים במטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & a-4 & a & 0 \\ -1 & a^2+a+2 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2=R_2-2R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & a & a-2 & 2 \\ -1 & a^2+a+2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3=R_3+R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & a & a-2 & 2 \\ 0 & a^2+a & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3=R_3-(a+1)R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & a & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & -(a+1)(a-2) & -2a-2 \end{array}\right)$$

עכשיו צריך לבדוק כמה איברים מובילים יש לנו. אם $a\neq -1,0,2$ יש שלושה איברים מובילים ולכן יש פתרון יחיד. עכשיו נשאר לבדוק את שלושת המקרים החריגים האלה.
אם $a=-1$ אז המטריצה המתקבלת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אין שורת סתירה אבל יש משתנה חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות. נמצא פתרון כללי

$$z=t$$

$$y = -3t - 2$$

$$x = 2y - z - 1 = -6t - 4 - t - 1 = -7t - 5$$

כלומר הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} -7t - 5 \\ -3t - 2 \\ t \end{pmatrix}$$

אם $a = 2$ אז נקבל מערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

יש כאן שורת סתירה ולכן אין פתרון.

אם $a = 0$ נקבל מערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

זאת למעשה מטריצה שעוד לא מדורגת לגמרי. נסיים את הדירוג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xmapsto{R_3 = R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כאן אין שורות סתירה אבל יש משתנה חופשי (בעמודה השניה) ולכן יש אינסוף פתרונות.

נמצא פתרון כללי. המשתנה החופשי כאן הוא y אז נסמן

$$y = t$$

ונמצא ש $z = -1$ ו

$$x = 2y - z - 1 = 2t$$

ולכן הפתרון הכללי במקרה הזה הוא

$$\begin{pmatrix} 2t \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$

וזהו.

2. נתונה מטריצה הפיכה 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') מצאו את A^{-1}.

פתרון. יש לנו אלגוריתם בשביל למצוא הפוכי של מטריצה. נשתמש בו, צריך לכתוב

את A ולידה את I ולדרג את A עד I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{R_2=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_1=R_1-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_2=\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_1=R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) (10 נק') כתבו את A בתור מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון. לפי התהליך שעשינו בסעיף הקודם אפשר "לקרוא" את המטריצות האלמנטריות שהשתמשנו בהן כדי להביא את A ל I כל אחת מ 5 פעולות השורה שביצענו

מתאימה למטריצה אלמנטרית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I$$

ולכן

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ג) (5 נק') תהי $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה לא הפיכה. האם למערכת המשוואות $BAx = 0$ יש פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? או שאין פתרון? נמקו תשובתכם.

פתרון. קודם כל זאמת מערכת משוואות הומוגנית ולכן יש לפחות פתרון אחד. עכשיו, בגלל ש B לא הפיכה, גם BA לא הפיכה ולכן למערכת המשוואות $BAx = 0$ יש אינסוף פתרונות. (נזכור: עבור מטריצה ריבועית A למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אם ורק אם המטריצה הפיכה)

3. (א) נתונים 4 וקטורים ב $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

i. (10 נק') נגדיר מרחב וקטורי $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. מצאו בסיס עבור W. מהו $\dim W$?

פתרון. יש לנו אלגוריתם בשביל למצוא בסיס בכזה מצב, נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xmapsto{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\xmapsto{R_3=R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זאת כבר צורה מדורגת. קיבלנו שיש שתי עמודות חופשיות, העמודה השלישית והרביעית ולכן אם ניקח את שני הוקטורים הראשונים מהקבוצה שהתחלנו איתה, נקבל בסיס עבור W. כלומר

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

הוא בסיס מתאים. לכן ברור ש

$$\dim W = 2$$

ii. (10 נק') נגדיר

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

האם $u_1 \in W$? האם $u_2 \in W$? נמקו.

פתרון. נבדוק האם u_1 או u_2 הם צירוף לינארי של איברי הבסיס. נתחיל עם

u_1. אנחנו רוצים לבדוק אם יש פתרון למשוואה

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

נייצג את מערכת המשוואות במטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\1&1&0\\0&-2&2\end{array}\right)\xmapsto{R_2=R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\0&-1&1\\0&-2&2\end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-2R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

אין שורת סתירה ולכן יש פתרון ולכן $u_1 \in W$. נעשה אותו דבר עבור u_2.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\1&1&1\\0&-2&1\end{array}\right)\xmapsto{R_2=R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&-1&0\\0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-2R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרון ולכן $u_2 \notin W$.

(ב) (5 נק') חשבו את הזוית בין הוקטורים u_1, u_2 הנתונים בסעיף הקודם.

פתרון. לפי נוסחא, אם נסמן את הזוית בין u_1 ל u_2 ב θ אז

$$u_1 \cdot u_2 = ||u_1||||u_2||\cos\theta$$

עכשיו

$$u_1\cdot u_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-1+2=1$$

$$||u_1|| = || \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} || = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$||u_2|| = || \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} || = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

ולכן

$$1 = \sqrt{3}\sqrt{5}\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{15}}$$
$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 1.3$$

4. (א) (10 נק') נתונה מטריצה התלויה בפרמטר a

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

נתון כי A הפיכה וכי $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$. מצאו את הפרמטר a.

פתרון.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{4}$$

ולכן

$$|A| = 4$$

נחשב את הדטרמיננטה של A, נגיד נבצע פיתוח לפי עמודה ראשונה

$$\left| \begin{pmatrix} a & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ a+1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right| = a \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right| - 1 \left| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right| + (a+1) \left| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= -3a + 7 + (a+1)\cdot 1 = -2a + 8$$

לכן

$$-2a+8=4$$

ולכן

$$a=2$$

(ב) (10 נק') נתונה מטריצה $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

i. ביצענו על B את פעולות השורה הבאות וקיבלנו את המטריצה C.

- $R_1 \leftrightarrow R_4$
- $R_3 = R_3 - 2R_2$
- $R_2 = 3R_2$

עוד נתון כי $|C^3| = 8$. מצאו את $|B|$.

פתרון. בעצם לפי הנתון

$$|C^3| = |C|^3 = 8$$

ולכן

$$|C| = 2$$

עכשיו, נזכור איך פעולות שורה משנות דטרמיננטה:

- $R_1 \leftrightarrow R_4$: מכפיל ב -1
- $R_3 = R_3 - 2R_2$: לא משנה
- $R_2 = 3R_2$: מכפיל ב 3

ולכן למעשה

$$|C| = -3|B|$$

לכן

$$2 = -3|B|$$

ולכן

$$|B| = -\frac{2}{3}$$

ii. (5 נק') האם עמודות B תלויות לינארית? נמקו.

פתרון. לפי הסעיף נקודם

$$|B| \neq 0$$

לכן B הפיכה ולכן העמודות שלה בלתי תלויות לינארית.

5. נתונות שתי מטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') הראו כי A לכסינה ו B לא לכסינה. נמקו.

פתרון. נתחיל עם B. נחפש ערכים עצמיים

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

ולכן הערך העצמי היחיד הוא $\lambda = 2$ עם ריבוי אלגברי $a_2 = 2$. עכשיו נחפש ריבוי גיאומטרי

$$B - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אם נדרג את המטריצה נקבל

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר יש לנו משתנה חופשי אחד ולכן

$$\dim N(B - 2I) = \dim V_2 = 1$$

כלומר הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 2$ הוא

$$g_2 = 1$$

שהוא שונה מהריבוי האלגברי ולכן B לא לכסינה.

עכשיו נעבור ל A, ראשית נמצא ערכים עצמיים

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (-\lambda)(1-\lambda) - 2$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

כלומר הערכים העצמיים הם $\lambda = 2$ ו $\lambda = -1$. הריבויים האלגבריים של שניהם הם 1:

$$a_2 = 1, \quad a_{-1} = 1$$

בגלל ש $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$ אנחנו למעשה יודעים מייד ש

$$g_2 = 1, \quad g_{-1} = 1$$

עכשיו, יש לנו 2 ערכים עצמיים, ועבור כל אחד מהם הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי ולכן המטריצה A לכסינה.

(ב) (10 נק') חשבו את A^n.

פתרון. בשביל לחשב A^n צריך באמת למצוא בסיסים למרחבים העצמיים בשביל למצוא את P. אז נתחיל בלמצוא בסיס ל V_{-1}

$$A-(-1)I = A+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

נדרג ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן פתרון כללי יהיה

$$\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

ובסיס למרחב העצמי V_{-1} יהיה למשל (עבור בחירה $t=-1$)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

עכשיו, עבור המרחב העצמי V_2

$$A-2I=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג נקבל

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן פתרון כללי יהיה

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}$$

ולכן בסיס ל V_2 יהיה למשל (עבור בחירה $t=2$)

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

מכאן קיבלנו בסופו של דבר ש

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ועבור מטריצות אלה

$$P^{-1}AP=D$$

ולכן

$$A=PDP^{-1}$$

$$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ -(-1)^n & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n\frac{2}{3} + \frac{2^n}{3} & -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2^n}{3} \\ -(-1)^n\frac{2}{3} + \frac{2^{n+1}}{3} & \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ג) (5 נק') האם המטריצה $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ דומה למטריצה B? נמקו.

פתרון. נחשב ערכים עצמיים של C

$$
|C - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(4-\lambda)
$$

הערכים העצמיים הם $1, 4$ אבל הערכים העצמיים של B היו $2, 2$. כלומר יש ל B ו C ערכים עצמיים שונים ולכן הן לא דומות.

נוסחאות:

- אורך: $||u|| = \sqrt{u \bullet u}$
- מרחק: $d(u,v) = ||u - v||$
- זוית: $\cos\alpha = \frac{u \bullet v}{||u||||v||}$
- הטלה: $\pi_v(u) = \frac{u \bullet v}{v \bullet v} v$