**חדוו"א 1 89118 תרגיל 10**

## שאלה 1

חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

ג. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x\right)^{\sin(2x)}$.

ד. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$.

ה. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

## פתרון שאלה 1

### סעיף א

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right].$$

נשתמש בכלל לופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2x+2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{2x+2}\right]=\frac{1}{2}$$

### סעיף ב

$$\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}}.$$

נשתמש בכלל לופיטל

$$\left(\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)\right)'=\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{x\tan x}=\frac{x-\sin x\cos x}{x\sin x\cos x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin 2x}$$

נשתמש שוב בכלל לופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin 2x+x^2\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x\sin x\cos x+x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{2\sin x}{x}\cdot\cos x+\cos 2x}=\frac{1}{3}$$

ולכן הגבול הוא $e^{\frac{1}{3}}$.

**<u>סעיף ג</u>**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x\right)^{\sin(2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\tan x)^{\sin(2x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\sin(2x)\ln(\tan x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin(2x)}}}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin(2x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{\frac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x)}{-2\sin x\cos x\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x)}{-\sin 2x\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{-\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\tan(2x)\right)=0$$

ולכן הגבול הוא 1.

**<u>סעיף ד</u>**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos\left(x^2\right)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x\cos\left(x^2\right)}{4x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2\cos\left(x^2\right)+2x\cdot 2x\cdot\sin\left(x^2\right)}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2\cos\left(x^2\right)}{12x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{4x^2\cdot\sin\left(x^2\right)}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2\cos\left(x^2\right)}{12x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos\left(x^2\right)}{6x^2}+0$$

נשאר לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos\left(x^2\right)}{6x^2}$. נשתמש שוב בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-\cos\left(x^2\right)}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(2x)+2x\sin\left(x^2\right)}{12x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)}{6x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{6}=-\frac{1}{3}.$$

**<u>סעיף ה</u>**

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x\sqrt{x}}\right]$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x\sqrt{x}}\right]=\infty$$

## שאלה 2

הראה כי שימוש בכלל לופיטל לא פותר את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5\cos(4x)}{x-\sin x}$. מדוע?

## פתרון שאלה 2

לאחר שימוש בכלל לופיטול נקבל $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-20\sin(4x)}{1-\cos x}$ הגבול לא קיים ולכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

## שאלה 3

א. הראה כי למשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$ פתרון יחיד ב $[0,\infty)$.

ב. הראה כי $x>\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ לכל $x>0$.

ג. הראה כי $\frac{\sin x}{x}$ יורדת ב $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. הסק כי שם $\frac{2x}{\pi}\le\sin x\le x$.

ד. הראה כי לכל $b>a>0$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$.

## פתרון שאלה 3

### סעיף א

### משפט רול

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$.

ב. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח $(a,b)$.

ג. $f(a)=f(b)$.

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=0$.

נתבונן בפונקציה $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$.

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x-2x \Rightarrow f'(x)=x\cos x-2x \Rightarrow f'(x)=x(\cos x-2)$.

הנגזרת מתאפסת רק כאשר $x=0$.

$f(0)=1,\ f(\pi)=-1-\pi^2<0$ ועל פי משפט ערך הביניים קיים $0<c<1$ כך ש $f(c)=0$.

אם הייה פתרון נוסף למשוואה ז"א הייה קיים $0<d$ כך ש $f(d)=0$ היינו מקבלים משפט רול מספר $e$ בין $c$ ל $d$ כך ש $f'(e)=0$ בסתירה לכך שהנגזרת של הפונקציה $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$ מתאפסת רק עבור $x=0$.

### סעיף ב

נראה שהפונקציה $f(x)=x-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ חיובית לכל $x>0$.

$f(0)=0$.

נגזור ונראה שהפונקציה עולה לכל $x>0$.

$$f'(x)=1-\frac{(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{((e^x+e^{-x})+(e^x-e^{-x}))((e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x}))}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{2e^x\cdot 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}=1-\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$1-\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=0\Rightarrow(e^x+e^{-x})^2=4$$

סה"כ נקבל שתי אפשרויות:

אפשרות 1: $e^x+e^{-x}=-2$ לא ייתכן מכיוון ש $e^x+e^{-x}>0$ לכל $x$.

אפשרות 2: $e^x+e^{-x}=2 \Leftarrow e^{2x}-2e^x+1=0 \Leftarrow (e^x-1)^2=0 \Leftarrow x=0$.

הנגזרת מתאפסת רק כאשר $x=0$.

עבור $x=2$ נקבל ש $f'(x)>0$ ומכיוון שפונקצית הנגזרת רציפה והיא מתאפסת רק עבור $x=0$ נקבל שפונקצית הנגזרת חיובית לכל $x>0$ ולכן הפונקציה עולה לכל $x>0$.

מכיוון ש $f(0)=0$ נקבל שלכל $x>0$ $f(x)>0$.

**<u>סעיף ג</u>**

נסמן $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

מכיוון שהמכנה חיובי לכל $x\neq 0$ נשאר להראות ש $x\cos x-\sin x<0$ לכל $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

נסמן $g(x)=x\cos x-\sin x \Leftarrow g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x \Leftarrow g'(x)=-x\sin x$.

$\sin x>0, x>0$ לכל $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ולכן $x\sin x>0$ לכל $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

סה"כ $g'(x)<0$ לכל $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

מכיוון ש $g(0)=0$ והפונקציה $g(x)$ יורדת לכל $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ אז $g(x)<0$ לכל $x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ והפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ יורדת לכל $x$ בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ והפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ יורדת בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן $\sin x\le x$.

$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$ והפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ יורדת בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן $\frac{2x}{\pi}\le\sin x$.

**סעיף ד**

מכיוון ש $b>a$ נקבל ש $b-a>0$ ולכן מספיק להוכיח ש $\frac{1}{1+a^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\frac{1}{1+b^2}$.

הפונקציה $f(x)=\arctan x$ היא פונקציה רציפה ולכן קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש

$f'(c)=\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}$. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{1+c^2}$ ולכן

$\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}=\frac{1}{1+c^2}$.

מכיוון ש $0<a<c<b$ נקבל $\frac{1}{1+a^2}<\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+b^2}$.

הראה כי לכל $0<a<b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+a^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+b^2}$.

**שאלה 4**

מצא את הנקודה/נקודות $c$ ממשפט לגרנז' עבור:

א. $f(x)=x^2$ ב $[0,3]$. ב. $f(x)=\frac{1}{x}$ ב $[1,2]$. ג. $f(x)=x^3$ ב $[-1,1]$.

**פתרון שאלה 4**

**סעיף א**

$f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{9}{3}=3$ בנוסף $f'(x)=2x\Rightarrow f'(c)=2c$ סה"כ קיבלנו

$2c=3\Rightarrow c=1.5$.

**סעיף ב**

$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1}=-\frac{1}{2}$ בנוסף $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(c)=-\frac{1}{c^2}$ סה"כ קיבלנו

$c=\sqrt{2}$.

**סעיף ג**

$f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1$ בנוסף $f'(x)=3x^2\Rightarrow f'(c)=3c^2$ סה"כ קיבלנו ש $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**שאלה 5**

א. הראה של $f(x)=\frac{1}{x}$ אין נקודת לגרנז' $c$ בכל $[a,b]$ כך ש $a<0<b$. מדוע?

ב. נתון $f(0)=0$ וקיימת $f'_+(0)=0$. הוכח כי $\lim_{x\to 0^+}x^{f(x)}=1$.

**פתרון שאלה 5**

**סעיף א**

$f'(c)=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=\frac{a-b}{ab(b-a)}=-\frac{1}{ab}$ מכיוון ש $a<0<b$ נקבל ש $-\frac{1}{ab}>0$ ואילו

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

ייתכן מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=0$ .

**<u>סעיף ב</u>**

$x^{f(x)}=e^{\ln x^{f(x)}}=e^{f(x)\ln x}$ .

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'_+(x)}{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-x\ln^2 x\right)f'_+(x)=0$$

ואז $\lim_{x\to 0^+} e^{f(x)\ln x}=1$ .