תרגול 11

ההעתקה הצמודה

פונקציונאלי ליניארי ומשפט ההצגה של ריס

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F. המרחב הדואלי של V שיסומן ב V^* הוא המרחב הוקטורי שאיבריו הם הפונקציות הליניאריות $V \to F$. החיבור והכפל בסקלר מוגדרים בצורה הטריויאלית. איבר ב V^* נקרא פונקציונאלי ליניארי.

יהי V מרחב וקטורי ו S תת קבוצה של V נגדיר את המרחב האפס של S : ע"י

$S^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0; \forall v \in S\}$.

הערה

ניתן להראות ש S^0 תת מרחב של V^* (במידה ויאפשר הזמן)

תרגיל ממבחן (תשע"ב מועד ב)

א. נסח את משפט ההצגה של ריס.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. הוכח: לכל $\varphi \in U^0$ קיים $w \in U^\perp$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.

פתרון

א. לכל פונקציונאלי ליניארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$ לכל $v \in V$.

ב. יהי $\varphi \in U^0$ ובפרט $\varphi \in V^*$ וממשפט ההצגה של ריס נקבל שקיים $w \in V$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$. נשאר להוכיח ש $w \in U^\perp$ ז"א צריך להוכיח שלכל $u \in U$ מתקיים $\langle u, w \rangle = 0$. יהי $u \in U$ ואז $\varphi(u) = \langle u, w \rangle$ ומכיוון ש $\varphi \in U^0$ נקבל ש $\varphi(u) = 0$ ואז $\langle u, w \rangle = 0$ כדרוש.

תרגיל ממבחן (תשע"א מועד א)

א. הגדר על $\mathbb{C}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך שהבסיס $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ יהיה אורתונורמלי.

ב. נגדיר $\varphi \in (\mathbb{C}_n[x])^*$ על ידי: לכל $p(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, $\varphi(p(x)) = p'(1)$.

כלומר, גוזרים את $p(x)$ ואח"כ מציבים 1. (אין צורך להוכיח כי φ פונקציונאלי ליניארי.) לגבי המכפלה הפנימית שהגדרת בסעיף קודם, מצא $q(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ כך שלכל $p(x) \in \mathbb{C}_n[x]$, מתקיים $\varphi(p(x)) = \langle p(x), q(x) \rangle$.

פתרון

א. עבור $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ כך ש $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i, p_2(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle p_1(x), p_2(x) \rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$.

נראה שהבסיס $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ הוא אורתונורמלי.

לפי הגדרת המכפלה הפנימית נקבל ש $\langle x^n, x^m \rangle$ שווה ל 1 אם $n = m$ ושווה ל 0 אם $n \neq m$ ולכן הבסיס $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ אורתונורמלי.

ב. ניקח את הפולינום $q(x)=\sum_{i=1}^{n} ix^i$ ואז עבור $p(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$ נקבל מצד אחד $\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\cdot i)$ ומצד שני $p'(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot ix^{i-1}$ ואז $\varphi(p(x))=p'(1)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\cdot i)$.

<u>ההעתקה הצמודה</u>

<u>משפט</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה.

א. קיימת העתקה יחידה $T^*:W\to V$ כך שלכל $v\in V, w\in W$ מתקיים: $\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle$.

ב. ההעתקה $T^*:W\to V$ היא העתקה ליניארית.

ג. בבסיס אורתונורמלי כלשהו $\{w_1,\ldots,w_n\}$ של W, $T^*:W\to V$ נתונה ע"י הנוסחה

$$T^*(v)=\sum_{i=1}^{n}\overline{(T(w_i),v)}w_i.$$

<u>הגדרה</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה $T^*:W\to V$ היא ההעתקה היחידה המקיימת $\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle$ לכל $v\in V,w\in W$.

<u>תרגיל</u>

נתון מרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית בו. נתונה העתקה ליניארית $T(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

מצא את ההעתקה הצמודה T^*.

<u>פתרון</u>

נבחר ב $\mathbb{R}^2$ את הבסיס האורתונורמלי הסטנדרטי $\{e_1,e_2\}$ ונשתמש בנוסחה עבור T^*.

נקבל ש $T^*(v)=\langle T(e_1),v\rangle e_1+\langle T(e_2),v\rangle e_2$. על פי הגדרת T מתקיים

$T(e_1)=(1,1),T(e_2)=(-1,-1)$ ולכן לכל $v=(x,y)$ נקבל

$\langle T(e_1),v\rangle=x+y,\langle T(e_2),v\rangle=-x-y$ ז"א

$$T^*(v)=(x+y)e_1+(-x-y)e_2=(x+y,-x-y)$$

$$T^*(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>

לכל בסיס אורתונורמלי B של המרחב V מתקיים: $[T^*]_B=[T]_B^*$.

<u>תרגיל</u>

תהי $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ המוגדרת ע"י $T(z_1,z_2,z_3)=(iz_1,iz_1+(1+i)z_2,iz_1+(1+i)z_2+(i+2)z_3)$

מצא את ההעתקה הצמודה.

<u>פתרון</u>

יהי $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ בסיס אורתונורמלי.

ואז ההעתקה הצמודה היא $[T]_B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ i & 1+i & 0 \\ i & 1+i & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_B^* = \begin{pmatrix} -i & -i & -i \\ 0 & 1-i & 1-i \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$

$T^*(z_1, z_2, z_3) = (-iz_1 - iz_2 - iz_3, (1-i)z_2 + (1-i)z_3, (2-i)z_3)$.

<u>משפט</u>

תהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית. אז מתקיים:

א. $(T^*)^* = T$.

ב. $(S+T)^* = S^* + T^*$.

ג. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

ד. $(ST)^* = T^* S^*$.

ה. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

<u>הגדרה</u>

אופרטור $T: V \to V$ נקרא נורמלי אם $TT^* = T^*T$.

<u>דוגמא</u>

$T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ העתקה המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2iy \\ 2x + (4+2i)y \end{pmatrix}$.

<u>תרגיל תש"ע מועד ב</u>

הוכח כי אם T אופרטור נורמלי ו α, β מספרים מרוכבים כך ש $|\alpha| = |\beta| = 1$, אז גם האופרטור $\alpha T + \beta T^*$ הוא נורמלי.

<u>פתרון</u>

מספיק להוכיח ש $(\alpha T + \beta T^*)^* (\alpha T + \beta T^*) = (\alpha T + \beta T^*)(\alpha T + \beta T^*)^*$.

בעזרת המשפט הקודם נקבל ש $(\alpha T + \beta T^*)^* = (\alpha T)^* + (\beta T^*)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T$

מאגף שמאל נקבל

$$(\alpha T + \beta T^*)^* (\alpha T + \beta T^*) = (\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T)(\alpha T + \beta T^*) =$$
$$\overline{\alpha}\alpha T^* T + \overline{\alpha}\beta T^* T^* + \overline{\beta}\alpha TT + \overline{\beta}\beta TT^*$$

מאגף ימין נקבל

$$(\alpha T + \beta T^*)(\alpha T + \beta T^*)^* = (\alpha T + \beta T^*)(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T) =$$
$$\alpha\overline{\alpha} TT^* + \alpha\overline{\beta} TT + \beta\overline{\alpha} T^* T^* + \beta\overline{\beta} T^* T$$

וקיבלנו שוויון

<u>הגדרה</u>

העתקה ליניארית $T: V \to V$ נקראת צמודה לעצמה אם $T^* = T$ ונקראת אוניטרית אם $T^* = T^{-1}$.

<u>דוגמא</u>

ההעתקה $T(v) = \alpha v$ תהייה צמודה לעצמה אם רק אם α ממשי.

<u>תרגיל</u>

יהי V מרחב מכפלה פנימית, $T:V\to V$ צמוד לעצמו, U אופרטור אוניטרי. הוכח כי UT נורמלי אם ורק אם U ו T^2 מתחלפים.

פתרון

$$(UT)(UT)^* = (UT)(T^*U^*) = UT^2U^*$$

$$(UT)^*(UT) = (T^*U^*)(UT) = T^2$$

אם UT נורמלי נקבל ש $UT^2U^* = T^2 \Leftrightarrow UT^2U^*U = T^2U \Leftrightarrow UT^2 = T^2U$ כדרוש.
המעברים הם או ורק אם מכיוון ש U אוניטרי ובפרט הפיך.

תרגיל

נתבונן בשלושת התנאים הבאים על העתקה ליניארית $T:V\to V$:

א. T אוניטרית.
ב. T צמודה לעצמה.
ג. $T^2 = I$.

הוכח כי קיום כל שני תנאים מאלה שרשומים לעיל גורר את קיום התנאי השלישי.

פתרון

1. אם T אוניטרית וצמודה לעצמה נקבל ש $T^2 = TT^* = I$.
2. אם T צמודה לעצמה ו $T^2 = I$ אז $TT^* = T^2 = I$.
3. אם T אוניטרית ו $T^2 = I$ אז $T^2 = I \wedge T^*T = I \Rightarrow T^*T^2 = T \Rightarrow T^* = T$.

תרגיל

הוכח כי אם $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה כך ש $T^2 = T$ אז T היא הטלה אורתוגונאלית על תת מרחב $U = \operatorname{Im} T$.

פתרון

נסמן $U = \operatorname{Im} T$ על פי משפט פירוק הניצב מתקיים $V = U \oplus U^\perp$. כלומר עבור $v \in V$ כלשהו קיימים $u_1 \in U, u_2 \in U^\perp$ כך ש $v = u_1 + u_2$. על מנת להראות ש T היא הטלה אורתוגונאלית על תת מרחב $U = \operatorname{Im} T$ יש להראות ש $T(v) = u_1$.

יהי $u \in V$ כלשהו, אז מתקיים: $(Tv,u) = (Tu_1 + Tu_2, u) = (Tu_1,u) + (Tu_2,u) = (Tu_1,u) + (u_2,Tu)$

מכיוון ש $u_2 \in U^\perp$ נקבל ש $(u_2,Tu) = 0$ לכל $u \in V$ ולכן נקבל שלכל $u \in V$ מתקיים

$(Tv,u) = (Tu_1,u)$ ז"א $T(v) = T(u_1)$. מכיוון ש $u_1 \in U = \operatorname{Im} T$ קיים $w_1 \in V$ כך ש $T(w_1) = u_1$.

סה"כ נקבל $T(v) = T(u_1) = T(T(w_1)) = T^2(w_1) = T(w_1) = u_1$.