05/07/16

פתרון מועד א' – מבוא לאנליזה 2 למורים – 88-612-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את:

א. $\int \frac{\cos(x)}{\sin^4(x)+\sin^2(x)}dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^4(x)+\sin^2(x)}dx = \begin{Bmatrix} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)dx \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{t^2\left(t^2+1\right)}dt$$

ניתן לבצע פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{t^2\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

אבל אנחנו נשתמש בטריק שמקצר את הדרך:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$$

לכן

$$\frac{1}{t^2\left(t^2+1\right)} = \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}$$

סה"כ

$$\int \frac{1}{t^2\left(t^2+1\right)}dt = \int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = -\frac{1}{t}-\arctan(t)+C = -\frac{1}{\sin(t)}-\arctan(\sin(t))+C$$

ב. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx = \begin{Bmatrix} t=\sqrt{e^x-1} \\ t^2+1=e^x \\ x=\ln\left(t^2+1\right) \\ dx=\frac{2t}{t^2+1}dt \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2+1}dt = \int \frac{2}{t^2+1}dt = 2\arctan(t)+C = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

.2

א. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

<u>אסימפטוטות אנכיות</u>:

הפונקציה אינה רציפה ב 0 והנקודה -1 היא נקודת קצה.

נחשב גבולות:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=-\infty$$

לכן $x=-1$ היא אסימפטוטה אנכית.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\infty=\infty$$

לכן גם $x=0$ אסימפטוטה אנכית (אפשר להמשיך לחשב ולראות שזו אסימפטוטה אנכית משני הצדדים).

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל</u> **אינה קיימת**, כיוון שהפונקציה אינה מוגדרת עבור $x\le -1$.

<u>אסימפטוטה משופעת מימין</u>:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^3}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2(1+x)}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}-0\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x(1+x)}=0$$

לכן $y=0$ אסימפטוטה אופקית מימין.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

חשבנו כבר את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\infty=\infty$$

לכן הנקודות הבעיתיות הן $0,\infty$. נפרק את האינטגרל לשני תחומים.

נראה כי $\int_0^1 \frac{1}{x}dx \sim \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ חברים, ולכן האינטגרל מתבדר בקטע, ולכן סה"כ מתבדר.

שני האינטגרלים חיוביים ולכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

ואכן האינטגרלים חברים.

3.

א. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)dt}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)dt}{x^3}\underset{L'\text{Hopital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}2x^3\frac{\sin\left(x^4\right)}{x^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{1}{3}$$

ב. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k\cdot n}}$

נראה שמדובר בסכומי רימן של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ הרציפה בקטע $[0,1]$.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k\cdot n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

כעת נחשב את האינטגרל

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\int_0^1(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=2\sqrt{2}-2$$

4.

א. קרבו את $\int_0^1 x^2\sin\left(x^2\right)dx$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{1,000}$.

ראשית ידוע כי $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ לכן

$$\sin\left(x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$x^2\sin\left(x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+4}}{(2n+1)!}$$

$$\int_0^x t^2\sin\left(t^2\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+5}}{(4n+5)(2n+1)!}$$

סה"כ

$$\int_0^1 x^2\sin\left(x^2\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+5)(2n+1)!}$$

כיוון שמדובר בטור לייבניץ (סדרה יורדת לאפס, סימנים מתחלפים) על מנת לקבל את הקירוב הרצוי נסכום את האיברים עד ולא כולל האיבר הראשון שקטן מהשגיאה:

$$\int_0^1 x^2\sin\left(x^2\right)dx\approx\frac{1}{5}-\frac{1}{9\cdot 3!}$$

ב. חשבו את $f^{(65)}(0)$ עבור $f(x)=x^2\sin\left(x^2\right)$.

ראינו כי $x^2\sin\left(x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{4n+4}}{\left(2n+1\right)!}$.

המקדם של x^{65} הוא 0 ולכן $f^{(65)}(0)=0$.

5. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בכל $\mathbb{R}$, כך שנגזרתה רציפה בכל $\mathbb{R}$.

א. <u>הוכיחו/הפריכו</u>: אם $f'(x)$ זוגית אזי $f(x)$ אי-זוגית.

הפרכה:

$f'(x)=0$ היא זוגית, אך $f(x)=1$ אינה אי זוגית.

באופן דומה אפשר לקחת כל פונקציה אי זוגית ולהוסיף לה קבוע שונה מאפס:

למשל $f(x)=\sin(x)+2$ אינה אי זוגית אך $f'(x)=\cos(x)$ זוגית.

ב. <u>הוכיחו/הפריכו</u>: אם $f'(x)$ אי-זוגית אזי $f(x)$ זוגית.

(רמז: השתמשו במשפט היסודי של החדו"א.)

הוכחה:

כיוון שהנגזרת רציפה, $\int_0^x f'(t)dt = f(x)-f(0)$

כיוון שהנגזרת אי זוגית, נובע כי $f(-x)-f(0) = \int_0^x f'(t)dt=\int_0^x -f'(-t)dt=\left[f(-t)\right]_0^x$

שימו לב שהשתמשנו בעובדה ש $\left(f(-x)\right)'=-f'(-x)$.

סה"כ לכל x מתקיים כי $f(x)-f(0)=f(-x)-f(0)$

לכן $f(x)=f(-x)$ כלומר f הינה זוגית.