

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \ln(1 + e^x \sin(x))}{1 - \cos(x)} \quad \text{א.}$$

$$2. \quad \text{נביט בפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - a}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

$$3. \quad \text{נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה} \quad a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{n}, \quad \text{ותנאי ההתחלה} \quad 0 < a_1.$$

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4.

א. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $e^{2x} - x$.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = \sqrt{x}$.

5. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, ומקיימת כי $f'(x) \leq x$ לכל $x \in \mathbb{R}$, וכמו כן $f(0) = 0$.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים כי $f(x) < x^2$.

ב. הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x) = \infty$ (רמז: בחרו פונקציה $h(x)$ עבורה $h'(x) = f'(x) - x$).