מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"א מועד ג'

כ"ד תשרי תשפ"ב, 30.9.2021

מרצים: גיא בלשר, תמר בר-און, אליהו מצרי, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (21 נק') נביט במטריצה

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים למרחב השורות $R(A)$ ולמרחב העמודות $C(A)$.

(ב) מצאו בסיס ומימד למרחב האפס $N(A)$.

(ג) מצאו בסיס ומימד ל-$R(A) \cap C(A)$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

2. (21 נק') יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$, ונביט בווקטורים $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ הנתונים על ידי

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} a^2 \\ -2a \\ -a^3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ענו על הסעיפים הבאים:

(א) מצאו לאילו ערכי הפרמטר a מתקיים כי $v_4 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(ב) קבעו לכל ערך של הפרמטר a כמה העתקות ליניאריות שונות $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ קיימות המקיימות

$$Tv_1 = Tv_2 = Tv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ג) קבעו לכל ערך של הפרמטר a כמה העתקות ליניאריות שונות $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ קיימות המקיימות

$$Tv_1 = Tv_2 = Tv_3 = Tv_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

3. (21 נק') יהי $V=\mathbb{R}^2$, יהי $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס סדור (משמאל לימין) של V, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית (אופרטור) כך ש-$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי לא קיים בסיס C שעבורו $[T]_C^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(ב) הביעו באמצעות איברי B בסיס C של V שעבורו $[T]_B^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(ג) הביעו באמצעות איברי B בסיסים ל-$\ker(T^2-T)$ ול-$\mathrm{Im}(T^2-T)$. (תזכורת: $T^2=T\circ T$)

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

4. (21 נק') יהי V מ"ו נוצר סופית ממימד $n \geq 1$ ותהיינה $T, S : V \to V$ העתקות לינאריות (אופרטורים) כך ש-$T \circ S = T$.

(א) הוכיחו או הפריכו: $\ker T = \ker S$.

(ב) הוכיחו או הפריכו: $\dim \mathrm{Im} T \leq \dim \mathrm{Im} S$.

(ג) הוכיחו: $\dim \mathrm{Im}(S - I) + \dim \mathrm{Im} T \leq n$ (כאשר $I : V \to V$ היא העתקת הזהות).

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

5. (21 נק') תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(א) הוכיחו: אם $AB = 0$ אז $\mathrm{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$ או $\mathrm{rank}(B) \leq \frac{n}{2}$.

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $\mathrm{rank}(A) < \frac{n}{2}$ וגם $\mathrm{rank}(B) < \frac{n}{2}$ אז $AB = 0$.

(ג) <u>הוכיחו או הפריכו:</u> $\dim N(AB) \leq \dim N(A) + \dim N(B)$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___