מבחן מועד א' – משוואות דיפרנציאליות – 27-301 – 27.02.23

מרצה: דר' ארז שיינר | מתרגלים: גב' ירדן נתיב ומר ניר שרייבר | משך המבחן: שלוש שעות

משקל כל שאלה: 22 נק' | חומר עזר: נוסחאון מצורף ומחשבון מדעי

1. (משיעורי הבית) מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$ המקיים $y(0) = -2$.
2. (משיעורי הבית) מצאו פתרון למד"ר $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$ המקיים $y(1) = 1$.
3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 3y' + 2y = e^x$ המקיים $y(0) = 2, y'(0) = 2$.
4. מצאו קירוב ל$y(1.2)$ כאשר y הוא פתרון המד"ר $y' = xy + \sqrt{y}$ המקיים $y(1) = 1$, בעזרת שיטת אוילר כאשר גודל הצעד הוא $h = \frac{1}{10}$.
5. כדור בעל מסה $m = 1kg$ נעזב ממהירות התחלתית אפס. מה תהיה מהירות הכדור לאחר 2 שניות כאשר:
(בשני הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).
   א. הכוח היחיד הפועל על הכדור הוא כוח המשיכה mg.
   ב. הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v.

<u>נוסחאון למבחן מד"ר תשפ"ג</u>

נגזרות:

$f'(x)$	$f(x)$
nx^{n-1}	x^n
$lna \cdot a^x$	a^x
$\frac{1}{x \cdot lna}$	$\log_a x$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan(x)$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{a}{a^2+x^2}$	$\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
ae^{ax}	e^{ax}

אינטגרלים

$\int f(x)dx$	$f(x)$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	x^n
$\ln\|x\|+C$	$\frac{1}{x}$
$-\cos(x)+C$	$\sin(x)$
$\sin(x)+C$	$\cos(x)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$	a^x

אינטגרציה בחלקים: $\int uv' = uv - \int u'v$

זהויות טריגונומטריות מרכזיות:

$$sin(\alpha) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \tan(\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cot(\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1 \quad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha cos\alpha \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$$

$$sin\alpha \pm sin\beta = 2sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos\alpha - cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

טורי טיילור הבסיסיים:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \ (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \ (-1 < x < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \quad (\forall x)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots \quad (\forall x)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots \quad (\forall x)$$

למציאת טור טיילור סביב $x_0 \neq 0$ יש להשתמש בהצבה $t = x - x_0$.

נוסחא כללית למד"ר לינארית:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot (C + \int \left(q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right)dx$$

גורמי אינטגרציה במד"ר מדויקת:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx} \qquad \mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}dy}$$

מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, פתרון המתאים לשורש מרוכב של פולינום אופייני:

בהינתן פתרון לפולינום האופייני $\lambda = a \pm bi$ (תמיד גם הצמוד יהיה פתרון), הפתרון המתאים למד"ר יהיה

$$y = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\sin(bx)$$

שיטת הניחוש למד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים לא הומוגנית:

אם $f(x)$ פולינום מדרגה m:

- אם $\lambda = 0$ **אינו** שורש של הפולינום האופייני מנחשים y_p פולינום מסדר m.
- אם כן, מנחשים את אותו y_p מוכפל ב-x^k, כאשר k החזקה של $\lambda = 0$ בפולינום האופייני.

אם $f(x)$ פולינום מדרגה m מוכפל ב-e^{ax}:

- אם $\lambda = a$ **אינו** שורש של הפולינום האופייני מנחשים y_p פולינום מסדר m המוכפל ב-e^{ax}.
- אם כן, מנחשים את אותו y_p מוכפל ב-x^k, כאשר k החזקה של λ בפולינום האופייני.

אם $f(x)$ פולינום מדרגה m מוכפל ב-$e^{ax}\sin(bx)$ או ב-$e^{ax}\cos(bx)$:

- אם $\lambda = a + bi$ **אינו** שורש של הפולינום האופייני, מנחשים $y_p = e^{ax}\sin(bx)\,Q_m(x) + e^{ax}cos(bx)\,R_m(x)$ כאשר $Q_m(x), R_m(x)$ הם שני פולינומים שונים מסדר m. אם $f(x)$ היא חיבור של שתי פונקציות, בוחרים את הסדר הגבוה מבין שני הפולינומים.
- אם כן, מנחשים את אותו y_p מוכפל ב-x^k, כאשר k החזקה של λ בפולינום האופייני.

נוסחאות שיטת אוילר ושיטת אוילר המשופרת:

נתונה מד"ר בצורתה הנורמלית $y' = f(x,y)$ ונקודת התחלה (x_0, y_0).

$$x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

משופרת:

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot y'_{x_{n-1}+\frac{h}{2}} = y_{n-1} + h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot y'_{n-1}\right)$$

מקדמי טור פורייה:

טור פורייה מתכנס לפונקציה $f(x)$ בטווח $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

כאשר מקדמי פורייה נתונים ע"י הנוסחא:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$