חבורות פתירות(המשך)

תזכורת: הגדרה: G חבורה פתירה אם קיימת לה סדרה נורמלית שכל גורמיה אבליים.

הגדרה: ת"ח הקומוטטור: תהא G חב'.
$a,b\in G$,$[a,b]:=aba^{-1}b^{-1}$ - הקומוטטור
$G'=\langle\{[a,b]:a,b\in G\}\rangle$ - ת"ח הקומוטטור

עובדה: 1. $G'=\{e\}$ אם"ם G אבלית.
2. אם G פשוטה לא אבלית אז $G'=G$

הגדרה: סדרת הקומוטטור:

$$G^{(0)}:=G$$

$$G^{(1)}:=G'$$

$$G^{(i+1)}:=\left(G^{(i)}\right)'$$

משפט: G פתירה אם"ם קיים t סופי כך ש$G^{(t)}=\{e\}$

מסקנה 1: תת חבורה של חבורה פתירה היא פתירה.

מסקנה 2

חבורת מנה של חב' פתירה היא פתירה.

הוכחה

למה 1: תהא G חב', $N\trianglelefteq G$. $\pi:G\to {}^{G}\!/\!_{N}$ אפימורפיזם קנוני(ז.א. $\forall_{g\in G}\pi\left(g\right)=gN$). $H\leq G$.
אזי $\pi\left(H'\right)=\left(\pi\left(H\right)\right)'$

הוכחת למה 1:

$$\pi\left(H\right)'=\langle\{[\pi\left(a\right),\pi\left(b\right)]:a,b\in H\}\rangle=\langle\{[aN,bN]:a,b\in H\}\rangle=$$

$$=\langle\{[a,b]\,N:a,b\in H\}\rangle=\langle\{\pi\left([a,b]\right):a,b\in H\}\rangle=\pi\left(H'\right)$$

מש"ל למה 1.

נחזק את למה 1:

למה 2: לכל $0\leq i$ שלם $\left(\pi\left(H\right)\right)^{(i)}=\pi\left(H^{(i)}\right)$

הוכחת למה 2: באינדוקציה על i.

עבור $i=0$ $(\pi(H))^{(0)}=\pi(H)=\pi\left(H^{(0)}\right)$

נניח נכונות עבור i, נוכיח עבור $i+1$

$$\pi(H)^{(i+1)}=\left(\pi(H)^{(i)}\right)'=\left(\pi\left(H^{(i)}\right)\right)'=\pi\left(H^{(i+1)}\right)$$

נחזור להוכחת מסקנה 2(חבורת מנה של חבורה פתירה היא פתירה)

G פתירה, לכן לפי המשפט קיים t סופי כך ש$G^{(t)}=\{e\}$. ואז:

$$\left({}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}\right)^{(t)}=\pi(G)^{(t)}=\pi\left(G^{(t)}\right)=\pi(\{e\})=eN=N=\left\{e_{{}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}}\right\}$$

לפי המשפט קיבלנו ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ פתירה.

מסקנה 3(משפט)

תהא G חבורה $N\trianglelefteq G$. אם $N(i)$ פתירה וגם ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}(ii)$ פתירה אזי G פתירה.

הוכחה

${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ פתירה, לכן לפי המשפט דלעיל קיים t_1 סופי כך ש$\left({}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}\right)^{(t_1)}=e_{{}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}}=N$

לפי למה 2,

$$N\left({}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}\right)^{(t_1)}=(\pi(G))^{(t_1)}=\pi\left(G^{(t_1)}\right)=\left\{xN:x\in G^{(t_1)}\right\}$$

$$\Rightarrow\forall_{x\in G^{(t_1)}}xN=N\Rightarrow\forall_{x\in G^{(t_1)}}x\in N\Rightarrow\boxed{G^{(t_1)}\subseteq N\,(\text{✡})}$$

מאידך, לפי (i) N פתירה, לכן קיים t_2 סופי כך ש$N^{(t_2)}=\{e\}$ (✡✡)

$$(\text{✡})\,(\text{✡✡})\Rightarrow\left(G^{(t_1)}\right)^{(t_2)}\leq N^{(t_2)}=\{e\}$$

$$\Rightarrow G^{(t_1+t_2)}=\{e\}$$

לכן, לפי משפט, G פתירה.

■

דוגמאות ושימושים

משפט 1

יהא p ראשוני. G חבורת-p(ז.א. סדרה p^k, k טבעי). אזי G פתירה.

הוכחה

באינדוקציה על k.

אם $k=1$ אז G חבורה מסדר ראשוני p. לכן היא ציקלית, בפרט אבלית, ולכן פתירה.

נניח נכונות עבור כל מעריך $m<k$. ז.א. כל חבורה מסדר p^m, $m<k$ פתירה.

תהא G חב' מסדר p^k. נראה שהיא פתירה.

לפי משפט שלמדנו יש לG מרכז לא טריוויאלי. ז.א. $|Z(G)|=p^{p'}$ כאשר $0<r\leq k$.

- מקרה א: $r=k$
  אז $G=Z(G)$ ולכן היא אבלית ולכן פתירה.

- מקרה ב: $0<r<k$
  אז $Z(G)\trianglelefteq G$ אבלית ולכן פתירה.

$G/Z(G)$ מסדר p^{k-r}. מכיוון ש$r>0$, $k-r<k$, ולכן לפי הנחת האינדוקציה $G/Z(G)$ פתירה.

לפי מסקנה 3, קיימת $N\trianglelefteq G$ פתירה כך שG/N פתירה $\Leftarrow$ G פתירה.

ולכן G פתירה.

■

עובדה 2

תהא G חבורה מסדר pq, p,q ראשוניים. אזי G פתירה.

הוכחה

אם $p=q$ אז G מסדר p^2 ולכן אבלית, ובפרט פתירה.

אם $p\neq q$ אז, בה"כ, $p<q$

לפי משפט קושי יש לG ת"ח H מסדר q. לפי משפט סילוא III, מס' ת"ח בG מסדר q, נסמנו r_q, מקיים $r_q|pq$ וגם $r_q\equiv 1 \bmod q$

$\Leftarrow$ $r_1\in\{1,p,q,pr\}$ $\Leftarrow$ $p, pq, q\neq r_q$ ולכן $r_q=1$

$\Leftarrow$ לכל $x\in G$, $xHx^{-1}=H$(כי xHx^{-1} ת"ח מאותו סדר כמו H) $\Leftarrow$ $H\trianglelefteq G$

H מסדר q לכן ציקלית ובפרט פתירה.

G/H מסדר p לכן ציקלית ובפרט פתירה.

לפי מסקנה 3, G פתירה.

■

הרחבה

זה עובד גם עבור חבורה מסדר pq^m ($p \le q$):

אם $p = q$ אז G מסדר p^{m+1} ולכן לפי מסקנה קודמת פתירה.

אם $p \neq q$ אזי לפי ההנחה, $p < q$

לפי משפט סילוא I יש לG ת"ח H מסדר q^m. לפי משפט סילוא III, מס' ת"ח בG מסדר q^m, נסמנו r_q, מקיים $r_q | pq^m$ וגם $r_q \equiv 1 \text{mod } q$

$\Leftarrow$ $q \nmid r_q \Leftarrow r_1 \in \{1, p, q, pr\}$. $r_q \neq p$, לפי $r_q \mid pq^m$ נקבל $r_q = 1$

$\Leftarrow$ לכל $x \in G$, $xHx^{-1} = H$ (כי xHx^{-1} ת"ח מאותו סדר כמו H) $H \trianglelefteq G \Leftarrow$

H מסדר q^m לכן לפי משפט פתירה.

G/H מסדר p לכן ציקלית ובפרט פתירה.

לפי מסקנה 3, G פתירה.

■

משפט ברנסייד (אסור להשתמש במבחן)

כל חבורה מסדר $p^i q^j$ (p, q ראשוניים) היא פתירה.

לא נוכיח (ואסור להשתמש במבחן)

עוד דוגמה

תרגיל

האם חבורה מסדר 42 בהכרח פתירה?

תשובה

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

לפי משפט קושי יש ת"ח H מסדר 7. לפי סילוא III מס' ת"ח מסדר 7 מקיים $r_7 | 42$, $H \Leftarrow r_7 = 1 \Leftarrow r_7 \equiv 1 \text{mod} 7$ נורמלית (משיקולים דלעיל).

H מסדר 7 לכן ציקלית, ובפרט פתירה. G/H מסדר 6, חבורה מסדר pq, ולכן לפי עובדה שהוכחנו, פתירה. ולכן G פתירה.

■

תרגיל

האם חבורה מסדר 30 פתירה?

תשובה

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

יש ב-G ת"ח H מסדר 5 (לפי קושי). מס' ת"ח r_5 מסדר 5 מקיים $r_5|30$, $r_5 \equiv 1 \bmod 5$ $\Leftarrow$ $r_5 \in \{1,6\}$.

אם $r_5 = 6$ אזי, ראשית, נשים לב שאם H_1, H_2 שתי ת"ח שונות מסדר 5 אזי $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ אחרת יש להן איבר $g \neq e$ משותף שיוצר את שתיהן ולכן $H_1 = \langle g \rangle = H_2$, כלומר עהן שוות בניגוד להנחה.

אם $r_5 = 6$ מה מס' איברים מסדר 5 ב-G? בכל חבורה מסדר 5, 5 אברים, 4 מסדר 5 ואחד מסדר 1 (והוא e). ב-6 חבורות שונות מסדר 5, יש $6 \cdot 4 = 24$ איברים שאינם e, והם מסדר 5. נותרו 5 איברים מסדרים 3 ו-2. כל חבורה מסדר 3 נותנת 2 איברים מסדר 2.

אם יש שתי ת"ח מסדר 3 אז יש חב' אחת בלבד מסדר 2

או, שיש ת"ח יחידה מסדר 3 (לא ייתכן שיש 3 ת"ח מסדר 3)

סיכום: יש או ת"ח יחידה מסדר 5
או ת"ח יחידה מסדר 3
או ת"ח יחידה מסדר 2

נסמן ב-K ת"ח יחידה מסדר ראשוני. קיבלנו K מסדר ראשוני ולכן פתירה.

K יחידה מסדר שלה, ולכן נורמלית. G/K מסדר pq, מכפלת שני ראשוניים, ולכן, לפי עובדה לעיל, פתירה.

לפי המשפט קיימת תח"נ פתירה, שהחב' מעליה פתירה $\Leftarrow$ G פתירה. אז G פתירה.

■

דוגמה לחב' לא פתירה

טענה

A_5 לא פתירה.

הוכחה

A_5 פשוטה, לפי משפט, ולא אבלית, ולכן לכל $0 \leq i$ שלם $(A_n)^{(i)} = A_n$. מכאן שאין t סופי כך ש-$(A_n)^{(t)} = \{e\}$ ולכן אינה פתירה.

תרגיל: כתוב הוכחה יותר פשוטה.

משפט (אסור להשתמש במבחן, כי מבוסס על ברנסייד)

כל חבורה מסדר $n < 60$ פתירה.

הוכחה

לכל $n<60$ יש לכל היותר שלושה גורמים ראשוניים שונים.
יתר על כן, לכל $n<60$ השונה מ$30,42$ $n\neq$ יש לכל היותר שני גורמים ראשוניים שונים. לכן לפי משפט ברנסייד לכל $n<60$, $n\neq 30,42$, חבורה מסדר n היא פתירה.
עבור $n=30,42$ הראינו שחבורה מסדר n פתירה.

משפט פייט-תומפסון(אסור להשתמש במבחן)

כל חבורה מסדר אי זוגי היא פתירה.
(אסור להשתמש בבחינה)

הבחינה

- כל המשפטים עד איזומורפיזם(כולל) - לדעת, לא להוכיח
- לדעת להוכיח קושי, סילוא I והלאה

מבנה הבחינה

- חלק א' - הוכחת משפטים שנלמדו בכיתה
- חלק ב' - 3 מתוך 4 שאלות.