לא מספיק לבחור תת חבורות בתור הגורמים. הרעיון הוא להסתכל על תח"נ ועל מנות $N \lhd G$ - צריך למצוא פעולה ? כך ש

$$G \cong N \ ? \ {}^{G}/_{N}$$

ההדבקה היחידה שאנחנו מכירים כרגע היא מכפלה ישרה $A \times B$

דוגמה

$$G = \mathbb{Z}_{49}$$

$$N = 7\mathbb{Z}_{49} \cong \mathbb{Z}_7$$

$\mathbb{Z}_7 \cong {}^{G}/_{N}$ חבורה מסדר 7 ולכן ציקלית$\cong \mathbb{Z}_7$, אבל

$$\mathbb{Z}_{49} \ncong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$$

הגדרה

סדרה נורמלית היא סדרה של ת"ח של G ... $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd G_3 \rhd \ldots$
תמיד ניתן לסגור סדרה מימין ע"י $\{e\}$
בתרגיל זה הסימון $G \rhd N$ אומר $N \neq G$
הגורמים של הסדרה הם ${}^{G_i}/_{G_{i+1}}$. לרוב מתייחסים לגורמים רק עד כדי איזו'.

דוגמאות

1. $G \rhd \{e\}$
2. $G = S_3 \rhd A_3 \rhd \{e\}$

הגדרה

עידון של סדרה נורמלית $G \rhd \ldots \rhd A \rhd B \rhd \ldots$ היא סדרה נורמלית $G \rhd \ldots \rhd A \rhd C \rhd B \rhd \ldots$ - הוספת תמ"נ לסדרה.

הערה: זאת אינה סדרה נורמלית: $G \rhd G \rhd \{e\} \rhd \{e\}$ - וגם לא עידון.

הגדרה

סדרה נורמלית נקראת סדרת הרכב אם לא קיימים לה עידונים.

משפט

סדרה נורמלית היא סדרת הרכב אם ורק אם כל הגורמים בה הם פשוטים!

הערה

חבורה אבלית היא פשוטה $\Leftrightarrow$ היא מסדר ראשוני(כלומר$\cong \mathbb{Z}_p$, p ראשוני)

דוגמאות

1. $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\rhd\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\{e\}\rhd\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\{e\}\times\{e\}\rhd\{e\}\times\{e\}\times\{e\}\times\{e\}$
לחבורה $\mathbb{Z}$ אין סדרת הרכב - $\mathbb{Z}\rhd m\mathbb{Z}\rhd\{e\}$. ניתן לעדן ...$\mathbb{Z}\rhd m\mathbb{Z}\rhd m^2\mathbb{Z}\rhd m^3\mathbb{Z}\rhd$

2. $G = S_4 \rhd A_4 \rhd V_4$
[$V_4 \lhd A_4$ כי לכל $\pi \in V_4$ ולכל $\sigma \in A_4$ אזי $\sigma\pi\sigma^{-1}$ היא בעלת אותו מבנה מחזורים כמו π. אבל בV_4 יש את כל התמורות עם מבנה מחזורים $2,2$. לכן V_4 סגורה להצמדה.]
ניתן לעדן לסדרת הרכב:

$$G = S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \underbrace{\{(1)\,,(1,2)\,(3,4)\}}_{=H} \rhd \{e\}$$

זאת סדרת הרכב כי כל הגורמים פשוטים. $H \rhd V_4$ בגלל ש$[V_4 : H] = 2$.
זאת לא סדרת ההרכב היחידה: ניתן להחליף את H בכל ת"ח אחרת מסדר 2 של V_4.

הגדרה

שתי סדרות נורמליות הן שקולות

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd ... \rhd G_k$$

$$H = H_0 \rhd H_1 \rhd ... \rhd H_m$$

אם $k = m$ (אורך של כל סדרה הוא מספר ה$\rhd$=מספר הגורמים) וגם הגורמים זהים עד כדי תמורה שלהם. כלומר קיימת $\pi \in S_k$ כך ש

$$\mathrm{H_i}/\mathrm{H_{i+1}} \cong \mathrm{G_{\pi(i)}}/\mathrm{G_{\pi(i)+1}}$$

משפט ז'ורדן-הולנדר-שרייר

אם לG קיימת סדרת הרכב אזי כל שתי סדרות הרכב שלה הן שקולות.

דוגמאות

1. $\{e\} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Z}_2}}{\lhd} 3\mathbb{Z}_6 = \langle 3\rangle \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Z}_3}}{\lhd} G=\mathbb{Z}_6$. (זאת סדרת הרכב: הגורמים פשוטים)

   $\{e\} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Z}_3}}{\lhd} 2\mathbb{Z}_6 \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Z}_2}}{\lhd} G=\mathbb{Z}_6$

   הסדרות שקולות ע"י התמורה $S_2 \ni (1,2)$.
   אלו סדרות ההרכב היחידות של $\mathbb{Z}_6$ כי ל$\mathbb{Z}_6$ אין עוד תח"נ, ולכן אין עוד עידונים ל$\{e\} \lhd \mathbb{Z}_6$.

2. $\{e\} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Z}_3}}{\lhd} A_3 \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{Z}_2}}{\lhd} G=S_3$. זאת סדרת ההרכב היחידה של S_3. הסדרה שקולה לסדרה של $\mathbb{Z}_6$, אבל הן אינן איזומורפיות.

חבורות פתירות

הגדרה

חבורה נקראת <u>פתירה</u> אם קיימת לה סדרה נורמלית שכל הגורמים הם אבליים.

דוגמאות

1. כל חבורה אבלית היא פתירה. $\{e\} \lhd G$ - הגורם הוא G והוא אבלי, ולכן החבורה פתירה.
2. $\{e\} \lhd A_5$ - הגורם פשוט$\cong A_5$ ואינו אבלי. זאת הסדרה הנורמלית היחידה של A_5 ולכן A_5 אינה פתירה.

תרגיל

הראו שS_4 פתירה.

פתרון

$$S_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\rhd} A_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\rhd} V_4 \underset{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}{\rhd} \{e\}$$

(זאת לא סדרת הרכב אבל זה מספיק)
כל הגורמים אבליים(לאו דווקא פשוטים) ולכן S_4 פתירה.

דוגמה

נסתכל על $H\leq GL_2\left(\mathbb{F}\right)$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה.

$$H=\left\{ \left.\begin{bmatrix}a & b\\0 & 1\end{bmatrix}\right|a\in\mathbb{F}^{*},b\in\mathbb{F}\right\}$$

בדקו האם H פתירה.

פתרון

בדקו שH אכן ת"ח.

נראה ש$H \triangleleft \left\{ \left.\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}\right|b\in\mathbb{F}\right\} = K$.

נראה שK היא גרעין של הומ':

$$\varphi:H\to\mathbb{F}^{*}$$

$$\varphi\left(A\right)=\det A$$

הגרעין של φ הוא K, לכן $K\triangleleft H$

$$\left\{ \begin{bmatrix}a & b\\0 & 1\end{bmatrix}\right\} \underset{\mathbb{F}^{*}}{\triangleright}\left\{ \begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}\right\} \underset{\mathbb{F}}{\triangleright}\left\{ e\right\}$$

($\mathbb{F}^{*}\cong{}^{\mathrm{H}}\!/\!{}_{\mathrm{K}}$ לפי איזו 1 על ההומ' φ) .

$$\psi:K\to\mathbb{F}$$

$$\psi\left(\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=b$$

בדקו שψ איזומורפיזם.

בדקו האם $H \triangleleft \left\{ \begin{bmatrix}a & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ ובנו סדרה נורמלית מתאימה $\left(\right)\begin{pmatrix}a & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & b\\0 & 1\end{pmatrix}$

תרגיל

כל חבורה מסדר pq פתירה.

פתרון

ראינו בעזרת משפטי סילוא ש$r_p=1$ או $r_q=1$(או שניהם) ולכן קיימת ת"ח נורמלית.

בה"כ נניח $r_p=1$

$r_p\in\left\{ 1,q\right\}$
$r_q\in\left\{ 1,p\right\}$

$$G\underset{\mathbb{Z}_{q}}{\triangleright}H_{p}\underset{\mathbb{Z}_{p}}{\triangleright}\left\{ e\right\}$$

שני הגורמים אבליים

משפט

$N \lhd G$.

G פתירה $\Leftrightarrow$ N פתירה וגם $^{G}/_{N}$ פתירה.

תרגיל

כל חבורת p היא פתירה.

פתרון

באינדוקציה על n כאשר $|G| = p^n$.

עבור $n = 1$ זה ברור כי $|G| = p$ ואז $G \cong \mathbb{Z}_p$ והיא אבלית ולכן פתירה.

ידוע ש$Z(G) \lhd G$.

אם $Z(G) = G \Leftarrow G$ אבלית ואז G פתירה.

$Z(G) \neq \{e\}$ בכל חבורת p[$p^n = |G| = |Zm(G| + \sum |\text{conj}(x)|$ - עושים מוד p ומקבלים סתירה]

$$G \underset{^{G}/_{Z(G)}}{\rhd} Z(G) \underset{Z(G)}{\rhd} \{e\}$$

$^{G}/_{Z(G)}$ חבורה מסדר p^{n-k}, $Z(G)$ חבורה מסדר k

$k, n-k < n$ ולכן לפי אינדוקציה $Z(G)$ פתירה(או לפי אבליות $Z(G)$) וגם $^{G}/_{Z(G)}$ פתירה, ואז לפי המשפט G היא פתירה.

הקומוטטור

הגדרה

יהיו $a, b \in G$, אזי <u>הקומוטטור</u> של a, b הוא

$$[a, b] := aba^{-a}b^{-1}$$

<u>תת חבורת הקומוטטור</u> של G היא

$$G' := \langle \{[a, b] | a, b \in G\} \rangle$$

משפט

$G' \lhd G$ וגם $^{G}/_{G'}$ אבלית

הערה

$$ab = ba \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow [a,b] = e$$

תרגיל

$$[a,b]^{-1} = \left(aba^{-1}b^{-1}\right)^{-1} = \left(bab^{-1}a^{-1}\right) = [b,a]$$

משפט

G חבורה פתירה $\Leftrightarrow$ קיים t כך ש$G^{(t)} = \{e\}$

סימון

$$G^{(1)} = G'$$

$$G^{(2)} = G''$$

$$G^{(3)} = G'''$$

$$\vdots$$

תרגיל(ממבחן)

הוכיחו או הפריכו - כל חבורה מסדר 60 היא פתירה.

נפריך

A_5 היא מסדר 60.

$A'_5 = A_5$ כי $A'_5 \lhd A_5$ $\Leftarrow$ בגלל שA_5 פשוטה, $A'_5 = \{e\}, A_5$. אבל אם $A'_5 = \{e\}$ אזי A_5 אבלית - סתירה.

ולכן $A'_5 = A_5$ $\Leftarrow$ לכל n, $A_5^{(n)} = A_5$$\Leftarrow$$A_5^{(n)} \neq \{e\}$ ולכן החבורה אינה פתירה.