החלק זה של הסיכום הוא בעיקר הערות ל
http://math-wiki.com/images/3/38/AA2class5.pdf

הגדרה

יהי $N = \{a \in R | \exists_{n \in N} a^n = 0\}$ אוסף האיברים הנילפוטנטים.
N הוא אידאל ונקרא הנילרדיקל.

תרגיל

הוכיח ש$N = n \{P \lhd R | P \text{ is prime}\}$

פתרון

נוכיח ש$\sqrt{I} = \bigcap \{P \lhd R | I \subseteq P, P \text{ is prime}\}$.
יהי $a \in \sqrt{I}$, ז"א קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש$a^n \in I$. נתון ש$I \subseteq P$, ז"א $a^n \in P$. P אידיאל ראשוני ולכן $a \in P$. קיבלנו שלכל P ראשוני שעבורו $I \subseteq P$, $a \in P$. על פי הגדרת החיתוך

$$a \in \bigcap \{P \lhd R | I \subseteq P, P \text{ is prime}\}$$

נניח בשלילה ש$a \notin \sqrt{I}$ ונוכיח ש$a \notin \bigcap \{P \lhd R | I \subseteq P, p \text{ is prime}\}$.
ז"א מספיק להוכיח שקיים אידאל ראשוני $I \subseteq P$ כך ש$a \notin P$.
$S = \{a^n\}_{n \geq 1}$ קבוצה סגורה כיפלית. משיעור שעבר קיים אידאל מקסימלי P ביחס לתכונה $P \cap S = \emptyset$ P ראשוני, ז"א $P \cap S = \emptyset$ ולכן $a \notin P$. אם $I = \{0\}$.

$$N = \sqrt{\{0\}}, I = \{0\}$$

$$a^n \in I \Rightarrow a^n = 0$$

אם ניקח $I = \{0\}$, מהתרגיל הקודם

$$\sqrt{I} = \bigcap \{P \lhd R | I \subseteq P, P \text{ is prime}\}$$

$$\sqrt{\{0\}} = \bigcap \{P \lhd R | \{0\} \subseteq P, P \text{ is prime}\} = \bigcap \{P \lhd R | P \text{ is prime}\}$$

תרגיל 6:
http://www.math-wiki.com/images/6/6d/AA2class6.pdf

הגדרה

יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה, ותהי S תת קבוצה שמהווה מונויד ביחס לכפל שאינה כוולת מחלקי אפס.

נסמן ב$S^{-1}R$ את מחלקות השיקלות של $S \times R$ תחת היחס

$$(x,r) \sim (s',r') \Leftrightarrow rs' = sr'$$

את המחלקה (s,r) מסמנים ב-$\frac{r}{s}$.

$S^{-1}R$ הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה ויש מונומורפיזם טבעי $i : R \to S^{-1}R$ המקיים $i(r) = 1$.

אברי S הולכים לאיברים הפיכים תחת מונומורפיזם זה.

$$i\left(\overbrace{x}^{\in S}\right) = \overbrace{\begin{matrix}(1,x)\\(x,1)\end{matrix}}^{\in S^{-1}R}$$

$$\overbrace{(x,x)}^{\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{x}} \sim (1,1)$$