בוחן ב׳ בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תשפ״ג

מרצים: פרופ׳ עוזי וישנה ופרופ׳ מיכאל מגרל

מתרגלים: תומר באואר וגיא בלשר

הוראות:

- יש לענות על כל שלוש השאלות פתרון מלא ומנומק.
- כתבו את תשובותיכם על גבי טופס הבחינה. ניתן להשתמש בשני צידי הדף. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

בהצלחה!

Lecturers: Prof. Uzi Vishne and Prof. Michael Megrel

Teaching assistants: Tomer Bauer and Guy Blachar

Instructions:

- Provide a full and detailed solution to all three questions.
- Write your answer on the exam form. You may use both sides of the paper. The draft notebook will not be checked.
- Total time: 90 minutes.
- The total score exceeds 100, but the maximal grade in the quiz is 100.
- Other resources: You may use a simple calculator.
- You may answer in English or Hebrew, as you wish.

Good Luck!

שאלה 1. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X.

א. (15 נק') הוכיחו כי G פועלת על קבוצת החזקה $P(X)$ לפי

$$g * A = \{g * x \mid x \in A\}$$

לכל $A \in P(X)$ ו-$g \in G$.

ב. (15 נק') נתבונן במקרה שבו $G = S_8$ ו-$X = \{1, \ldots, 8\}$ לפי הפעולה הרגילה. מצאו את גודל המסלול של האיבר $\{2, 1, 8\} \in P(X)$ בפעולה שהוגדרה בסעיף הקודם. נמקו את תשובתכם.

Question 1. Let G be a group acting on a set X.

a. (15 pts) Prove that G acts on the power set $P(X)$ by

$$g * A = \{g * x \mid x \in A\}$$

for any $A \in P(X)$ and $g \in G$.

b. (15 pts) Consider the case where $G = S_8$ and $X = \{1, \ldots, 8\}$ with the usual action. Find the size of the orbit for the element $\{2, 1, 8\} \in P(X)$ under the action defined in the previous item. Justify your answer.

דף נוסף לשאלה מספר 1

שאלה 2. יהי p ראשוני אי־זוגי, ותהי G חבורה מסדר $2p$ שיש לה תת־חבורה לא נורמלית $H \leq G$.

א. (5 נק') מצאו את הסדר $|H|$.

ב. (15 נק') הוכיחו כי $C_G(H) = H$.

ג. (15 נק') מצאו לכל $a \in H$ את גודל מחלקת הצמידות $|\mathrm{conj}_G(a)|$.

תזכורת: המְרַכֵּז של תת־קבוצה $S \subseteq G$ הוא $C_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S : gs = sg\}$.

Question 2. Let p be an odd prime, and let G be a group of order $2p$ which has a non-normal subgroup $H \leq G$.

a. (5 pts) Find the order $|H|$.

b. (15 pts) Prove that $C_G(H) = H$.

c. (15 pts) For any $a \in H$ find the size of the conjugacy class $|\mathrm{conj}_G(a)|$.

Reminder: The centralizer of a subset $S \subseteq G$ is $C_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S : gs = sg\}$.

דף נוסף לשאלה מספר 2

שאלה 3.

א. (20 נק') הפריכו: קיימת הטלה (אפימורפיזם) $f\colon \mathbb{Z}_2 \times S_3 \to \mathbb{Z}_6$.

ב. (20 נק') הוכיחו: קיים שיכון (מונומורפיזם) $f\colon U_{14} \times A_4 \to A_{11}$.
מציאת שיכון ל-A_{12} במקום A_{11} תזכה בניקוד חלקי.

Question 3.

a. (20 pts)
Disprove: There exists a projection (epimorphism) $f\colon \mathbb{Z}_2 \times S_3 \to \mathbb{Z}_6$.

b. (20 pts)
Prove: There exists an embedding (monomorphism) $f\colon U_{14} \times A_4 \to A_{11}$.
Finding an embedding to A_{12} instead of A_{11} will grant you a partial credit.

דף נוסף לשאלה מספר 3

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___