בוחן באנליזה מודרנית - פתרון

מועד א'

שאלה 1

תהי X קבוצה, ו־$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ אוסף תת־קבוצות שלה. נסמן ב־$\mathcal{S}$ את קבוצת כל הקבוצות F ב־$\sigma(\mathbb{A})$, עבורן קיימת משפחה בת־מניה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש־$F \in \sigma(\mathbb{B})$.

1. הוכיחו כי $\mathcal{S}$ היא σ־אלגברה.
2. הוכיחו כי $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{S}$.
3. הסיקו כי $\mathcal{S} = \sigma(\mathbb{A})$, כלומר לכל $F \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת־מניה כנ"ל.

פתרון

1. נראה כי $\mathcal{S}$ היא σ־אלגברה. יש להראות כי $\emptyset \in \mathcal{S}$, סגירות למשלים וסגירות לאיחוד בן־מניה.
   (א) כיוון שלכל משפחת קבוצות $\mathbb{B}$, $\sigma(\mathbb{B})$ היא σ־אלגברה, בפרט $\emptyset \in \sigma(\mathbb{B})$. למשל עבור $\mathbb{B} = \emptyset$, $\sigma(\mathbb{B}) = \{\emptyset, X\}$ ונקבל $\emptyset \in \mathcal{S}$.
   (ב) תהי $F \in \mathcal{S}$. אז קיימת משפחה בת־מניה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש־$F \in \sigma(\mathbb{B})$. זו σ־אלגברה, היא סגורה למשלים ולכן $F^c \in \sigma(\mathbb{B})$. לכן עבור אותה $\mathbb{B}$ נקבל $F^c \in \mathcal{S}$. כלומר $\mathcal{S}$ סגורה למשלים.
   (ג) תהי $\{F_n\}$ סדרת קבוצות כך ש־$F_n \in \mathcal{S}$ לכל n. לכל F_n קיימת משפחה בת־מניה $\mathbb{B}_n \subseteq \mathbb{A}$ כך ש־$F_n \in \sigma(\mathbb{B}_n)$. בפרט לכל n, גם $F_n \in \sigma(\bigcup_n \mathbb{B}_n)$. אם כן, $\bigcup_n \mathbb{B}_n$ היא קבוצה בת־מניה (כאיחוד בן־מניה של בנות מניה), ומתקיים $\bigcup_n F_n \in \sigma(\bigcup_n \mathbb{B}_n)$ (כי זו σ־אלגברה ולכן סגורה לאיחוד בן־מניה) לכן $\bigcup_n F_n \in \mathcal{S}$. כלומר $\mathcal{S}$ סגורה לאיחוד בן־מניה.
2. תהי $F \in \mathbb{A}$. אז $F \in \sigma(F)$. זו משפחה בת־מניה (כאן $\mathbb{B} = \{F\}$) ולכן לפי הגדרת $\mathcal{S}$, $F \in \mathcal{S}$.
3. לפי הגדרת $\mathcal{S}$ מתקיים $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathbb{A})$. הוכחנו בסעיף קודם כי $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{S}$ ולכן $\sigma(\mathbb{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ (המעבר השני הוא כי $\mathcal{S}$ היא σ־אלגברה). סך הכל $\mathcal{S} = \sigma(\mathbb{A})$.

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו: אם $|f|$ מדידה לבג אז f מדידה לבג.

הפרכה

בתחילת הקורס ראינו בניה של קבוצה לא מדידה לבג, נסמנה E. נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לפי $f=\mathbb{1}_E-\mathbb{1}_{E^c}$. f לא מדידה לבג, כי $f^{-1}\left(\{1\}\right)=E$ לא מדידה לבג (או למשל כי $f^{-1}\left([-\infty,0]\right)=E^c$ לא מדידה לבג). לעומת זאת $|f|=1$, וזו פונקציה מדידה לבג, שהרי

$$|f|^{-1}\left([-\infty,\alpha]\right)=\begin{cases}\emptyset & \alpha<1\\ \mathbb{R} & \alpha\geq 1\end{cases}\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$$

שאלה 3

יהי (X,S,μ) מרחב מידה כך ש־$\mu\left(X\right)<\infty$, ותהי f פונקציה אינטגרבילית אי־שלילית. הראו שמתקיים:

$$\lim_{\alpha\to1^-}\int_X f^\alpha d\mu=\int_X fd\mu$$

פתרון

תהי α_n סדרה המתכנסת ל־1 מלמטה. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח כי α_n מונוטונית עולה, אחרת קיימת לה תת־סדרה מונוטונית עולה. נגדיר $A=\{x\mid f\left(x\right)>1\}$. נשים לב כי לכל $x\in A$ ולכל n, הסדרה $f^{\alpha_n}\left(x\right)$ מונוטונית עולה ומתכנסת ל־$f\left(x\right)$. כמו כן הפונקציות f^{α_n} אי־שליליות ומדידות (ההנחה הסמויה בשאלה היא ש־f מדידה, אחרת האינטגרל לא מוגדר), ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f^{\alpha_n}d\mu=\int_A fd\mu$$

לכל $x\in A^c$ ולכל n מתקיים $f^{\alpha_n}\left(x\right)\leq 1$, כלומר $|f^{\alpha_n}|\leq\mathbb{1}_{A^c}$ לכל n, וזו פונקציה אינטגרבילית כי מידת המרחב סופית (כלומר $\infty>\mu\left(X\right)\geq\mu\left(A^c\right)=\int_A\mathbb{1}_{A^c}d\mu$). כעת ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A^c}f^{\alpha_n}d\mu=\int_{A^c}\lim_{n\to\infty}f^{\alpha_n}d\mu=\int_{A^c}fd\mu$$

שימו לב שמשפטי ההתכנסות מתארים התכנסות של אינטגרלים על X, אבל אפשר לדבר על אינטגרלים על תת־קבוצה על ידי הכפלה בפונקצית אינדיקטור מתאימה. סך הכל מאדיטיביות האינטגרל,

$$\int_X fd\mu=\int_A fd\mu+\int_{A^c}fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f^{\alpha_n}d\mu+\lim_{n\to\infty}\int_{A^c}f^{\alpha_n}d\mu$$

הוכחנו שהגבולות קיימים ולכן

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\int_A f^{\alpha_n}d\mu+\int_{A^c}f^{\alpha_n}d\mu\right)=\lim_{n\to\infty}\int_X f^{\alpha_n}d\mu$$

זה נכון לכל סדרה α_n ולכן

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$$