פתרון תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ה בכסלו ה'תשע"ז, 25.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. הוכיחו שמתקיים:

א. $S_n = \langle (ij) : i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \rangle$ (כלומר, S_n נוצרת על ידי קבוצת כל החילופים).

ב. $A_n = \langle (ijk) : i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\} \rangle$.

שאלה 2. תהי A_n חבורות החילופין (חבורת התמורות הזוגיות ב S_n). מה הם סדרי האיברים ב A_4?

פתרון.

האיברים ב A_4 הם התמורות הזוגיות ב S_4 , כלומר איבר
סדר 1- איבר היחידה בלבד (id).
סדר 2- מכפלה של תמורות אי זוגיות מהצורה: $(ij)(kl)$
סדר 3- מחזור מאורך 3 מהצורה: (ijk).
ואין אפשרויות נוספות.

שאלות להגשה

שאלה 3. הוכיחו שמתקיים: $S_n = \langle (1j) : j \in \{2,\ldots,n\} \rangle$ (רמז: אפשר באינדוקציה).

פתרון.

כל חילוף (i,j) ניתן לרשום כ $(1,i)(1,j)(1,i)$, כלומר הצלחנו ליצור את כל החילופים, ומכיוון שהחילופים יוצרים את S_n, הצלחנו ליצור את כל S_n.

שאלה 4. תהי S_n חבורת התמורות.

א. מצא את תת החבורה ב S_7 הנוצרת ע"י התמורה: $(4537)(126)$. שימו לב שזוהי חבורה ציקלית.

ב. מצאו <u>יוצר</u> לחיתוך של תת החבורה שמצאתם בסעיף א' עם חבורת החילופין A_7.

פתרון.

(א)

$$\langle(126)(4537)\rangle=\{(126)(4537),(162)(43)(57),(4735),(126),(162)(4537),(43)(57),$$
$$,(126)(4735),(162),(4537),(126)(43)(37),(162)(4735),id\}$$

(ב) נמצא את האיברים המשותפים לתת החבורה $\langle(126)(4537)\rangle$ו A_7:

$A_7\cap\langle(126)(4537)\rangle=\{(162)(43)(57),(126),(43)(57),(162),(126)(43)(37),id\}$.

יוצר לתת חבורה זו הינו $(162)(43)(57)$או $(126)(43)(37)$ (החזקות ה 2 וה 10 של $(126)(4537)$).

שאלה 5. נגדיר את המֶרְכָּז של חבורה G להיות

$$Z(G)=\{g\in G:\forall h\in G,gh=hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב-G שמתחלפים עם כל איברי G.

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G)\leq G$ (כלומר שהמרכז של חבורה הינו תת חבורה).

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(GL_2(\mathbb{R}))$, ואת האינדקסים שלהם בתוך S_3 ובתוך $GL_2(\mathbb{R})$ בהתאמה.

פתרון.

(א) על פי הקריטריון להוכחת תת חבורה:

i. $e\in Z(G)$ כי איבר היחידה מתחלף על פי ההגדרה עם כל איברי החבורה ולכן תמיד במרכז.

ii. נוכיח סגירות לכפל: יהיו $x,y\in Z(G)$, נוכיח שגם $xy\in Z(G)$ כלומר נוכיח שלכל $g\in G$ מתקיים $g(xy)=(xy)g$. הוכחה: $gxy=xgy=xyg$. (שני השוויונות נובעים מהנתון ש x ו y במרכז).

iii. נוכיח סגירות להופכי: יהא $x\in Z(G)$. נוכיח שגם $x^{-1}\in Z(G)$. הוכחה: כיוון ש x במרכז, מתקיים לכל $g\in G$ ש $xg=gx$. נכפול משמאל ומימין ב x^{-1} את שני אגפי השוויון: $x^{-1}xgx^{-1}=x^{-1}gxx^{-1}$ נצמצם ונקבל: $gx^{-1}=x^{-1}g$.

(ב) $Z(S_3)=\{id\}$ ולמעשה לכל S_n כאשר $n\geq 3$ המרכז טריוויאלי (כלומר כולל רק את איבר היחידה), והאינדקס שלו הוא 6. לגבי $Z(GL_2(\mathbb{R}))$, מכפל מטריצות ומבדיקה ישירה, מקבלים שזה שווה לאוסף כל המטריצות הסקלריות (אלכסוניות עם אותו איבר בכל האיברים על האלכסון), והאינדקס הוא ∞.

שאלה 6. תהי $Q_8=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י: $ijk=k^2=j^2=i^2=-1$. חבורה זו נקראת חבורת הקווטרניונים. נא לשים לב שבמרומז משמות האיברים מתקיים ש- $-i=(-1)\cdot i$, $(-i)\cdot(-j)=i\cdot j$ וכדומה.

א. השלימו את לוח הכפל של Q_8.

ב. מצאו את $Z(Q_8)$.

ג. מה האינדקס של $Z(Q_8)$ בתוך Q_8?

פתרון.

(א)

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	1	i	j	k
$\boldsymbol{i}$	i	-1	k	$-j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-k$	-1	i
$\boldsymbol{k}$	k	j	$-i$	-1

וקל להסיק את הכפל עבור האיברים הנגדיים.

(ב) צריך לחפש בלוח הכפל את כל האיברים שהשורות שלהם זהות לעמודות שלהם. קל לראות שאף אחד מהאיברים i, j, kאינו מתאים, ולכן גם הנגדיים שלהם לא מתאימים, ומקבלים ש $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

(ג) האינדקס שווה $\frac{8}{2}$ לפי משפט לגראנז', כלומר 4.

שאלה 7. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 4 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 4 של U_{35}.

פתרון.

תת החבורה $\{1, 8, 29, 22\} = \langle 8 \rangle$ מסדר 4 וציקלית ואילו $\langle 6, 29 \rangle$ מסדר 4 ולא ציקלית.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. הראו שמתקיים: $S_3 = \langle (12)\,, (123) \rangle = \langle (12)\,, (23) \rangle$.

פתרון.

נזכור שעל פי לגרנז', סדר תת חבורה מחלק את סדר החבורה לכן הסדרים האפשריים לתת חבורות לא טריוויאליות הנוצרות ע"י איברים מ S_3 הם $2, 3$.

כמו כן, הוכחנו שסדר איבר בחבורה מחלק את סדר החבורה.

החבורה $\langle (12)\,, (123) \rangle$בהכרח שווה ל S_3 הסבר: סדר המחזור (123) הוא 3 וסדר המחזור (12) הוא 2. כעת, מכיוון שסדר תת החבורה $\langle (12)\,, (123) \rangle$מתחלק ב 2ו 3, אזי בהכרח הסדר הוא 6, כלומר $S_3 = \langle (12)\,, (123) \rangle$

לגבי $\langle (12)\,, (23) \rangle$, נשים לב ש: $(132) = (13)\,(12)$כלומר תת חבורה זו מכילה איבר מסדר 3 , לכן על פי נימוק זהה, נסיק שגם תת חבורה זו מתלכדת עם החבורה S_3.

שאלה 9. הוכיחו: $A_n = \langle (12j) : j \in \{3, 4, \ldots, n\} \rangle$ (רמז: אינדוקציה).

פתרון.

לכל מחזור מאורך 3: (ijk) מתקיים $(ijk) = (12k)(12i)(12j)(12k)(12i)$. קל לבדוק שאמצעות כל המחזורים מאורך 3 ניתן ליצור את כל זוגות החילופים (תמורות מהצורה $(ij)(kl)$), ולכן ניתן ליצור את כל A_n.

שאלה 10. יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$.נגדיר:

$$L = \{an + bm : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$L_+ = \{t \in L : t > 0\}$$

משפט האפיון של הממ"מ אומר: $\gcd(n, m) = \min L_+$.

נוכיח אותו באמצעות כלים שלמדנו:

א. ראשית, הוכיחו שלכל $t \in L_+$: $\gcd(n, m) \le t$.

ב. הוכיחו ש- $(L, +) \le (\mathbb{Z}, +)$ (L תת-חבורה של $\mathbb{Z}$ עם פעולת החיבור).

ג. הסיקו את המשפט מסעיף א, מהעובדה שכל תת-חבורה של $(\mathbb{Z}, +)$ היא מהצורה $d\mathbb{Z}$ עבור $d \in \mathbb{Z}$ כלשהו, ומהעובדה ש- $n, m \in L$.

פתרון.

(א) $\gcd(n,m)$ מחלק גם את n וגם את m, לכן הוא מחלק כל צירוף לינארי שלהם עם מקדמים שלמים, ולכן לכל $an+bm \in L_+$, $\gcd(n,m) \le an+bm$ (כי $an+bm$ חיובי ומתחלק ב $\gcd(n,m)$).

(ב) נוכיח באמצעות הקריטריון המקוצר לתת חבורה:

i. $0 \in L$ כי הצירוף הטריוואלי שייך ל L.

ii. סגירות: לכל שני צירופים לינארים עם מקדמים שלמים של n, m, גם הסכום שלהם הינו צירוף לינארי עם מקדמים שלמים של n, m.

iii. קיום הופכי: אם $an+bm \in L$, אזי גם $(-a)n+(-b)m \in L$, והסכום שלהם הוא 0.

לכן L תת-חבורה של $\mathbb{Z}$.

(ג) לפי משפט שראינו בתרגול, קיים $d \in \mathbb{Z}$ כך ש $L = d\mathbb{Z}$. ניתן להניח ש d אי-שלילי, אחרת ניקח את $-d$ שיוצר את אותה תת-חבורה. כעת, $n, m \in L$, לכן קיימים $s, t \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = sd, m = td$. כלומר, d מחלק משותף של n, m, והוא אי שלילי לפי ההנחה, לכן הוא קטן או שווה למחלק המשותף המקסימלי. מצד שני, גם $d \in d\mathbb{Z} = L$, ולכן לפי סעיף א הוא גם גדול או שווה למחלק המשותף המקסימלי של n, m. לכן בסך הכל: $d = \gcd(n,m)$.

כעת, מתקיים $L_+ = d\mathbb{N}$, ולכן $\gcd(n,m) = d = \min L_+$.

שאלה 11. צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.

רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.