בס"ד

20.07.24

①

שיטות נומריות - תרגול 3

התבטלות

דוגמה:

מייצגים מספרים בדיוק של 5 ספרות משמעותיות.

$$x = \underbrace{2.22222}_{6\ \text{ספרות}}$$

$$y = \underbrace{2.22255}_{6\ \text{ספרות}}$$

$$fl(x) = \underbrace{2.2222}_{5\ \text{ספרות}} \cdot 10^0$$

$$fl(y) = 2.2225 \cdot 10^0$$

$$x - fl(x) = \Delta x = 0.00002$$

$$\Delta y = 0.00005$$

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = \delta x = 0.0009\%$$

$$\delta y = 0.0008\%$$

$$|x-y| = 0.00033$$

$$z = |fl(x) - fl(y)| - 0.0003$$

$$fl(z) = z = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta = x - y - (fl(x) - fl(y)) = 0.00003$$

$$\delta(x-y) = \frac{|\Delta|}{|x-y|} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{3.3 \cdot 10^{-4}} = 9.09\% \leftarrow \text{גדולה}$$

התבטלות: איבוד ספרות משמעותיות כתוצאה מקירוב.

בד"כ זה נובע מחיסור שני מספרים קרובים מאוד.

בנוסף - הילה לרוסום - נומריות - תרגולים.

2 שאלה:

א) מעוניינים לחשב את

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}-\sin\sqrt{x}$$

עבור x קטן

הבעיה: אם x קטן

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x}\approx 0$$

$$\sin\sqrt{x}\approx\sqrt{x}\approx 0$$

⇐ f תוצאה של חיסור שני מס' קרובים. ⇐ יש התבטלות.

נקרב את f בעזרת טור טיילור:

$$\sin(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\sin(x^{\frac{1}{2}})=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,\frac{x^{i+\frac{1}{2}}}{(2i+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x}\overset{\text{טור הנדסי}}{=}\sum_{i=1}^{\infty}x^i$$

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x}=\sum_{i=1}^{\infty}x^{i+\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}-\sin(\sqrt{x})=\sum_{i=1}^{\infty}x^{i+\frac{1}{2}}-\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\cdot\frac{x^{i+\frac{1}{2}}}{(2i+1)!}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{\left(1-(-1)^i\cdot\frac{1}{(2i+1)!}\quad\frac{1}{(2i+1)!}\right)}_{\text{חיסור מספרים שאינם קרובים}}x^{i+\frac{1}{2}}$$

⇐ אין התבטלות

ב) $f(x,y)=\ln x-\ln y$

כאשר $x\approx y$ $\ln x\approx\ln y$ ⇐ יש התבטלות.

2. $f(x,y) = \ln \frac{x}{y}$

פתרון משוואות בנעלם אחד:

משוואה לא לינארית:

$$f(x) = e^{2x} - x\cos^2 x$$

הפתרון של $f(x)=0$ נתון בצורה סתומה. אין נוסחה המשתמשת בפונקציות אלמנטריות המחשבת את X.

למרות שקיים פתרון!

הפתרון: נמצא קירוב איטרטיבי לפתרון של המשוואה.

אלגוריתם איטרטיבי:

אלגוריתם שנותן קירוב לפתרון בשלב n ומשמש בקירוב זה למציאת קירוב טוב יותר בשלב $n+1$.

האלגוריתם מייצר סדרה מתכנסת של קירובים x_n . $x_n \Rightarrow x$

שיטת החצ"ה:

אלגוריתם:

תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$ כך ש- $f(a)\cdot f(b)<0$.

אם f רציפה לפי ערך הביניים ויש ל-f שורש ב- $[a,b]$.

אנחנו מחפשים קירוב לשורש בדיוק אבסולוטי של δ.

אם x השורש! x^* הקירוב, (נעצור כאשר $|x-x^*|<\delta$

```
While TRUE
   x* = 1/2 (a+b)
      if f(x*) · f(a)<0
           b = x*
      else if   f(x*) f(b)<0
              a = x*
      else if f(x*) = 0
           break
      end
      if |a-b| < 2·δ
      end break
```

המשך התוכנית:

end

$$x^* = \frac{1}{2}(a+b)$$

יתרונות:

• מספיקה רציפות בתנאי שהשיטה תעבוד.

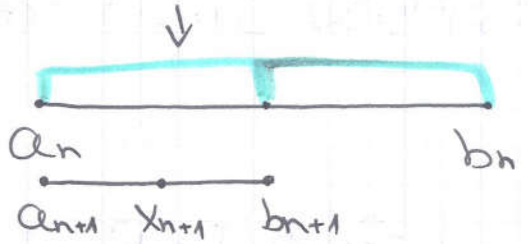
חסרונות:

• השיטה מתכנסת לאט.

תכונות:

① שגיאות הקירוב אחרי n איטרציות היא $\Delta x < \left|\frac{b-a}{2^n}\right|$

בשלב n, אורך הקטע הוא $b^n - a^n = \left|\frac{b-a}{2^{n-1}}\right|$



המרחק של x^{n+1} מקצוות הקטע הוא $\frac{|b-a|}{2^{n+1}}$ ולכן זה חסם

על המרחק שלו מהשורש.

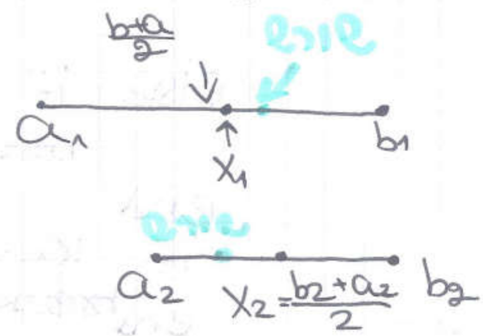
② אם נדרוש דיוק δ נחפש את n:

$$\Delta x \le \delta$$

$$\Delta x \le \frac{b-a}{2^n} < \delta$$

$$n \ge \log_2\left(\frac{b-a}{\delta}\right)$$

③ השגיאה לא יורדת (בהכרח) מונוטונית ב-n



בס"ד

3

$|x_2 - \text{שורש}| > |x_1 - \text{שורש}|$

שיטה ב: שיטת נק' השבת:

הבעיה: מחפשים קירוב לפתרון של המשוואה $f(x)=0$.

השיטה: מוצאים פונקציה $g(x)$ כך שמתקיים $g(x)=x$ בשורש של f.

אלגוריתם: בשלב ה-n מחשבים את הקירוב $x_{n+1}=g(x_n)$

קיימים משפטים המבטיחים התכנסות של x_n לשורש.

הכי שימושי: $|g'(x)|<1$ בסביבת השורש.

בדוגמא:

מצאו נוסחת איטרציה למציאת שורש של $f(x)=x^5-xe^x+\sin x$

נוסחת איטרציה: $x_{n+1}=g(x_n)$

נפתור את המשוואה $f(x)=0$ כלומר

$$x^5-xe^x+\sin x=0$$

$$x(x^4-e^x)=-\sin x$$

$$x=\frac{\sin x}{e^x-x^4}$$

נסמן $g(x)=\frac{\sin x}{e^x-x^4}$

לפי הנ"ל $f(x)=0 \iff g(x)=y$

יהא שהפתרון נמצא בסביבה של 0.

נחשב את הנגזרת של g בסביבה זו ונראה ש- $|g'(x)|<1$ סביב 0.

$\Rightarrow$ $x_{n+1}=g(x_n)$ תתכנס לשורש של f אם נבחר x_0 בסביבה מספיק קטנה של השורש.

[redacted]

תה״ש שאלה: נתונה הפונקציה

$$f(x) = x+\ln x$$

ידוע שישנה שורש בסביבת 0.5.

מצאו נוסחת איטרציה מתכנסת.

ניסיון 1:

$$x_{n+1} = -\ln x_n$$

$$x = -\ln x$$

$$g(x) = -\ln x$$

האם יש התכנסות?

$$g'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$|g'(0.5)| = 2$$

g' רציפה בסביבת 0.5 ולכן בסביבת 0.5, $|g'(x)|\approx 2$

$\Leftarrow$ $|g'(x)|>1$ $\Leftarrow$ האיטרציה לא מתכנסת.

ניסיון 2:

$$x+\ln x=0$$

$$-x=\ln x \quad / e^{\cdot}$$

$$e^{-x}=x$$

הנוסחה: $x_{n+1} = e^{-x}$

$$g(x)=e^{-x}$$

$$g'(x) = -e^{-x}$$

$$|g'(0.5)| = e^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$$

g' רציפה $\Leftarrow$ בסביבת 0.5 $\quad |g'|<1$

ניסיון 3:

$$x+\ln x=0$$

$$-x=\ln x$$

$$e^{-x}=x$$

$$e^{-x}+x = x+x=2x$$

$$\frac{e^{-x}+x}{2} = x$$

(4)

בס"ד

$$g(x) = \frac{e^{-x}+x}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}+x_n}{2}$$

$$g'(0.5) \approx 0.2$$

ככל ש- $|g'|$ קטנה יותר כך השיטה מתכנסת מהר יותר.

$\Leftarrow$ שיטה 3 עדיפה על שיטה 2.

יהי f פולינום בעל מספר אי-זוגי של שורשים

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$

כולם בעלי ריבוי אי-זוגי ומוכלים בקטע $[a,b]$.

תכונות אלו מבטיחות ש- $f(a)\cdot f(b) < 0$

$\Leftarrow$ שיטת החציה תתכנס לשורש כלשהו בקטע

בהנחה שהשיטה מתחילה בקטע $[a,b]$, לאילו שורשים השיטה לא תתכנס לעולם?

הניחו כי קצוות הקטעים במהלך השיטה אינם שורשים.

אם $f(a_1)>0$

$f(b_1)<0$

אז $f(a_n)>0$

$f(b_n)<0$

לכל n (הסימן בקצוות הקטעים נשמר)

$f(a_n)<0$

$f(b_n)>0$

השיטה לא תמצא שורשים שסביבם הסימנים של a_n,b_n יהיו הפוכים מהמקוריים. שורשים אי-זוגיים: $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \dots$