<u>פתרון תרגיל 2</u>

.1

א) אין זה אפילו מבנה אלגברי: אין אסוציאטיביות: $2-(3-4) \neq (2-3)-4$.

ב) חבורה (יש הופכי כיוון שהדטרמיננטה גדולה מ-0, אך יש צורך לבדוק שהוא אכן מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$).

ג) הקבוצה $H = \{(x,y)\in Z\times Z \mid x^2-3y^2=1\}$ עם הפעולה $(x,y)\bullet(z,w) = (xz+3yw, xw+yz)$ היא חבורה.

<u>הוכחה:</u>

(1) נוכיח סגירות: יהיו $(x,y),(z,w)\in H$, אזי $(x,y)\bullet(z,w) = (xz+3yw, xw+yz)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. כעת:

$$(xz+3yw)^2 - 3(xw+yz)^2 = x^2z^2 + 6xyzw + 9y^2w^2 - 3x^2w^2 - 6xyzw - 3y^2z^2 =$$
$$= x^2z^2 - 3x^2w^2 - 3y^2z^2 + 9y^2w^2 = (x^2-3y^2)(z^2-3w^2) = 1\cdot 1 = 1$$

ולכן $(x,y)\bullet(z,w)\in H$.

(2) נוכיח אסוציאטיביות: יהיו $(a,b),(r,s),(x,y)\in H$, אזי:

$$((a,b)\bullet(r,s))\bullet(x,y) = (ar+3bs, as+br)\bullet(x,y) =$$
$$= (arx+3bsx+3asy+3bry, ary+3bsy+asx+brx) =$$
$$= (arx+3asy+3bry+3bsx, ary+asx+brx+3bsy) =$$
$$= (a,b)\bullet(rx+3sy, ry+sx) = (a,b)\bullet((r,s)\bullet(x,y))$$

ולכן הפעולה $\bullet$ אסוציאטיבית.

(3) לא חייבים, אבל נראה כי הפעולה $\bullet$ חילופית:

$$(x,y)\bullet(z,w) = (xz+3yw, xw+yz) = (zx+3wy, wx+zy) = (z,w)\bullet(x,y)$$

(4) קיום יחידה: האיבר $(1,0)$ שייך ל-H כי $1^2-3\cdot 0^2=1$. בנוסף, לכל $(x,y)\in H$ מתקיים:

$$(1,0)\bullet(x,y) = (1\cdot x+3\cdot 0\cdot y, 1\cdot y+0\cdot x) = (x,y)$$

ולכן $(1,0)$ יחידה של H. (לא צריך לבדוק ש-$(x,y)\bullet(1,0)=(x,y)$ כי הוכחנו אבליות.)

(5) יהי $(x,y)\in H$. נראה כי קיים ל-(x,y) הופכי ב-H.

מהגדרת H ברור כי גם $(x,-y)\in H$ ומתקיים:

$$(x,y)\bullet(x,-y) = (x^2-3y^2, -xy+yx) = (1,0)$$

לכן, $(x,-y)$ הופכי של (x,y) (לא צריך לבדוק $(x,-y)\bullet(x,y)=(1,0)$ כי הוכחנו אבליות) ולכל איבר ב-H קיים הופכי.

ד. אין זה אפילו מבנה אלגברי: אין סגירות: $\sqrt{2} + (2-\sqrt{2}) = 2 \notin R\setminus Q$.

ה. גם פה, אין אסוציאטיביות: $(1*1)*2 = 0*2 = 0$ ואילו: $1*(1*2) = 1*(-1) = 2$ ולכן אין זהו מבנה אלגברי.

2. נבדוק כל אחת מהתכונות בצורה רוחבית לגבי כל אחת מהקבוצות $Q, Z/5Z, Z/7Z$:

כלומר $B \in \{Q, Z/5Z, Z/7Z\}$ ו- $A = B^*$

נבדוק את אקסיומות החבורה:

<u>סגירות</u>

$$(s+tx)(u+vx) = (su+2tv)+(sv+tu)x$$

מהסגירות של $Q, Z/5Z, Z/7Z$ עבור כפל וחיבור, נובע שהסגירות מתקיימת בכפל בתוך הקבוצות B ($(su+2tv) \in B, (sv+tu) \in B$), אך אנחנו לא יודעים אם לא מתקבל איבר האפס.

נבדוק מה קורה כאשר $(su+2tv) = (sv+tu) = 0$ (נזכור שקבוצות הבסיס עם פעולת הכפל הן חבורות קומוטטיביות, ולכן לכל איבר יש הופכי, וניתן להחליף סדר במכפלות)

$$\begin{matrix} sv+tu=0 & & su+2vt=0 & & \\ sv=(-1)tu & \Leftarrow & su=(-2)vt \ (u\neq 0) & \Leftarrow & (-2)v^2u^{-1}=(-1)u \\ (-2)vtu^{-1}v=(-1)tu & & s=(-2)vtu^{-1} & & (-2)v^2=(-1)u^2 \end{matrix}$$

(כאשר $u = 0$ אז $v \neq 0$ אחרת האיבר הראשון היה $0 \notin A$, לכן כדי ששני השיוויונות יתקיימו $s = 0, t = 0$ וזה גם לא יכול להתקיים אחרת האיבר השני היה $0 \notin A$)

מכאן קיבלנו את השיוויון $(-2)v^2 = (-1)u^2$.

ב- Q השיויון הזה שקול לשאלה האם- $\sqrt{2}$ הוא רציונלי או אי-רציונלי. מכיוון שאנחנו יודעים ש- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונלי השיויון לא מתקיים לאף u, v, ולכן לא נוכל לקבל את איבר האפס, והפעולה סגורה ב- B.

ב- $Z/5Z$ השיויון שקול ל $3v^2 = 4u^2$.

הריבועים האפשריים (x^2) ב- $Z/5Z$ הם 1 או 4 (אפשר לבדוק את כל ארבעת האפשרויות). הצבה של ארבעת האפשרויות של זוגות u^2, v^2 (נציב $\begin{matrix} u^2=1, v^2=1 \\ u^2=1, v^2=4 \end{matrix}$ וכן הלאה) מראה שאין פתרון ב- $Z/5Z$

ולכן לא נוכל לקבל את איבר האפס, והפעולה סגורה ב- B.

ב- $Z/5Z$ השיויון שקול ל $5v^2 = 6u^2$.

ב- $Z/7Z$ יש פתרון כאשר $u = 3, v = 1$. ואכן $(3+x)(3-x) = (9-2)+(3-3)x = 0$

לכן הקבוצה A עבור $Z/7Z$ אינה סגורה ולכן אינה חבורה

<u>אסוציאטיביות:</u>

נבדוק ש- $(ab)c = a(bc) \quad \forall a,b,c \in A$

$$[(s_1+t_1x)(s_2+t_2x)](s_3+t_3x) = \left[\left(s_1s_2+2t_1t_2\right)+(s_1t_2+t_1s_2)x\right](s_3+t_3x) =$$

$$=\left(s_1s_2+2t_1t_2\right)s_3+2(s_1t_2+t_1s_2)t_3+\left(\left(s_1s_2+2t_1t_2\right)t_3+(s_1t_2+t_1s_2)s_3\right)x =$$

$$= s_1s_2s_3+2t_1t_2s_3+2s_1t_2t_3+2t_1s_2t_3+s_1s_2t_3+2t_1t_2t_3+s_1t_2s_3+t_1s_2s_3$$

$$(s_1+t_1x)\left[(s_2+t_2x)(s_3+t_3x)\right] = (s_1+t_1x)\left[\left(s_2s_3+2t_2t_3\right)+\left(s_2t_3+t_2s_3\right)x\right] =$$

$$s_1\left(s_2s_3+2t_2t_3\right)+2t_1\left(s_2t_3+t_2s_3\right)+\left(s_1\left(s_2t_3+t_2s_3\right)+t_1\left(s_2s_3+2t_2t_3\right)\right)$$

$$s_1s_2s_3+2s_1t_2t_3+2t_1s_2t_3+2t_1t_2s_3+\left(s_1s_2t_3+s_1t_2s_3+t_1s_2s_3+2t_1t_2t_3\right)x$$

מכיון שהחבורות המקוריות הן קומוטטיביות מכפלות ה- s_i, t_j מתחלפות והביטויים שקיבלנו זהים.

$$\left[(s_1+t_1x)(s_2+t_2x)\right](s_3+t_3x)=(s_1+t_1x)\left[(s_2+t_2x)(s_3+t_3x)\right]$$

איבר יחידה:

איבר היחידה הוא $1+0\cdot x$:

$(s+tx)(1+0\cdot x)=s+tx$, $(1+0\cdot x)(s+tx)=s+tx$.

איבר הופכי:

$\frac{1}{s+tx}=\frac{1}{s+tx}\cdot\frac{s-tx}{s-tx}=\frac{s-tx}{s^2-2t^2}=(s-tx)(s^2-2t^2)^{-1}$, האיבר שאותו "הפכנו" נמצא בחבורה המקורית לכן קיים לו הופכי. ולכן לכל איבר ב- A קיים איבר הופכי, ומצאנו את צורתו.

(ב- $Z/5Z$ ניתן לכתוב את האיבר ההופכי כ- $\frac{1}{s+tx}=(s+4tx)(s^2+3t^2)^{-1}$)

לכן עבור $Q, Z/5Z$ הקבוצות שהגדרנו עם פעולת הכפל הינן חבורות. (בגלל הקומוטטיביות של החבורות המקוריות גם החבורות החדשות הינן קומוטטיביות).

3. . א) בדיקת האקסיומות (בקשר לקיום הופכי: למרות שידוע שיש הופכי ב- $GL_3(R)$, (הדטרמיננטה $\neq 0$) צריך עדיין להראות שהוא איבר ב- G). החבורה אינה אבלית. שימו לב: כדי להראות סגירות ו/או קומוטטיביות – יש צורך לבדוק תכונות אלה על איברים מהחבורה עצמה – ולא להראות, למשל, שכפל של איבר מ- G באיבר אחר מ- $GL_3(R)$ אינו קומוטטיבי.

4. בדיקת האקסיומות.

5. $A=R\bigcup\{\infty\}$

הפעולה מוגדרת כ- $a*b=\frac{a+b}{1-ab}$ כאשר $b*\frac{1}{b}=\frac{1}{b}*b=\infty$ ו- $\infty*b=b*\infty=-\frac{1}{b}$.

סגירות:

ב- R^* ישנה סגירות של הפעולות, לכן הפעולות הנוספות שהגדרנו (חילוק ב-0 ופעולה עם ה"אינסוף") משלימים את הסגירות של הכפל ב- A.

לפני שנבדוק האם הקבוצה עם הפעולה היא חבורה נראה שהפעולה קומוטטיבית:

$a*b=\frac{a+b}{1-ab}=\frac{b+a}{1-ba}=b*a$, והקומוטטיביות מתקיימת גם עבור הפעולות הספציפיות שהגדרנו.

אסוציאטיביות:

$$(a*b)*c=\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)*c=\frac{\left(\frac{a+b}{1-ab}+c\right)}{1-\frac{(a+b)c}{1-ab}}=\frac{a+b+(1-ab)c}{1-ab-(a+b)c}=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$$

$$a*(b*c)=a*\left(\frac{b+c}{1-bc}\right)=\frac{\left(a+\frac{b+c}{1-bc}\right)}{1-\frac{a(b+c)}{1-bc}}=\frac{a(1-bc)+b+c}{1-bc-a(b+c)}=\frac{a-abc+b+c}{1-bc-ab-ac}$$

פעולות החיבור והכפל ב-R הינן קומוטטיביות לכן $\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}=\frac{a-abc+b+c}{1-bc-ab-ac}$ ומכאן:

$(a*b)*c=a*(b*c)$.

נותר לבדוק אסוציטיביות עבור הפעולות שהגדרנו עם אינסוף

$$(a*b)*\infty=\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)*\infty=-\left(\frac{1-ab}{a+b}\right)=\frac{ab-1}{a+b}$$

$$a*(b*\infty)=a*\left(-\frac{1}{b}\right)=\frac{a-\frac{1}{b}}{1+\frac{a}{b}}=\frac{ab-1}{b+a}=\frac{ab-1}{a+b}$$

מהאסוציטיביות הזאת ובעזרת הקומוטטיביות ניתן להראות שהפעולה עם ∞ אסוציטיבית בכל מקום בו ה- ∞ לדוגמא כאשר ∞ הוא הביטוי הראשון:

$$\infty*(a*b)=\infty*(b*a)=(b*a)*\infty=b*(\infty*a)=(\infty*a)*b:$$

ובצורה דומה ניתן לעשות כאשר הוא הביטוי השני.

לכן הפעולה אסוציאטיבית.

<u>איבר יחידה:</u>

0 הוא איבר היחידה:

$$\infty*0=0*\infty=-\frac{1}{0}=\infty \quad a*0=0*a=\frac{a+0}{1-0}=a$$

ונזכיר כי בכל חבורה אם איבר היחידה קיים אז הוא יחיד.

<u>איבר הופכי:</u>

מכיוון ש-0 הוא איבר היחידה ננסה לבדוק את האיבר הנגדי:

$$a*-a=\frac{a-a}{1+a^2}=0$$

עבור ∞ ההופכי הוא ∞ $\infty*\infty=-\frac{1}{\infty}=0$.

מתקיימות כל 4 אקסיומות החבורה ולכן $R\bigcup\{\infty\}$ עם הפעולה שהגדרנו היא חבורה.

6. א) סגירות ואסוצ' – קל. איבר יחידה: העתקת הזהות היא איבר היחידה.

ב) שימו לב ש- $\mathrm{DU}=\mathrm{id}$ אבל $\mathrm{UD}\neq\mathrm{id}$. לכן D הפיך מימין אך לא משמאל (אם היה לו הפיך משמאל אז $\mathrm{D}\in\mathrm{U}(\mathrm{Hom}(\mathrm{V}))$ וכזכור, $\mathrm{U}(\mathrm{Hom}(\mathrm{V}))$ היא חבורת האיברים ההפיכים של $\mathrm{Hom}(\mathrm{V})$. אבל אז ההופכי השמאלי של D היה שווה להופכי הימני של D (כי בחבורה מתקיים יחידות ההופכי) ולכן ההופכי השמאלי היה חייב להיות שווה ל-U, אך אין זה כך). באותו אופן, U הפיך משמאל אך לא מימין.