מערכי הרצאה בדידה מדמח קיץ תשעז

13 בספטמבר 2017

תוכן עניינים

1 לוגיקה . . . 2
1.1 אטומים, פסוקים וטבלאות אמת . . . 2
1.2 טאוטולוגיות, שקילות לוגית והוכחות . . . 3
1.2.1 הוכחות . . . 4
1.3 צורות נורמליות וקבוצת קשרים שלמה . . . 4
1.3.1 קבוצת קשרים שלמה . . . 5
1.4 פרדיקטים, כמתים ושלילתם . . . 5
1.4.1 שלילת פסוקים . . . 7
2 קבוצות . . . 7
2.1 הגדרות ופעולות בסיסיות . . . 7
2.2 הכללת האיחוד והחיתוך . . . 10
2.3 קבוצת חזקה . . . 10
3 שיטות הוכחה . . . 11
3.1 הנחה בשלילה . . . 11
3.2 הוכחת קיים . . . 11
3.3 הוכחת לכל . . . 11
3.4 הכלה דו כיוונית . . . 12
3.5 גרירה חד כיוונית . . . 12
3.6 אמ"מ . . . 12
3.7 היפוך גרירה חד כיוונית . . . 12
3.8 פישוט המסקנה . . . 12
3.9 חלוקה למקרים . . . 13
3.10 שימוש במקרה פרטי . . . 13
3.11 יחידות . . . 13
4 אינדוקציה ורקורסיה . . . 13
4.1 אינדוקציה . . . 13
4.2 רקורסיה . . . 15
5 יחסים . . . 16
5.1 יחסי שקילות . . . 17
5.2 יחסי סדר . . . 20
6 פונקציות . . . 25
6.1 תמונה, תמונה הפוכה וצמצום של פונקציה . . . 29
7 עוצמות . . . 30

7.1 עוצמת הרצף 34
7.2 אריתמטיקה של עוצמות 35
8 קומבינטוריקה 37
8.1 בחירת k עצמים מתוך n 38
8.2 הכלה הדחה 40
8.3 שובך היונים 43
9 גרפים 43

1 לוגיקה

1.1 אטומים, פסוקים וטבלאות אמת

אטום הוא יחידה בסיסית שיכולה לקבל ערך אמת $TRUE$ (כלומר להיות אמיתית) או לקבל ערך אמת $FALSE$ (כלומר להיות שקרית) אך לא שניהם. למשל "היום חם", "יש 120 חברי כנסת בישראל", "יש אינסוף מספרים ראשוניים" וכו'. פסוק הוא משפט המכיל אטומים וקשרים בניהם שיכול להיות אמיתי או שקרי כתלות בערכי האמת של האטומים. למשל "היום הטמפ' יהיו גבוהות מאתמול וגם הים יהיה סוער" הוא משפט שמורכב משני אטומים "היום הטמפ' יהיו גבוהות מאתמול ו "היום יהיה סוער" שמקושרות בעזרת "וגם". הפסוק יקבל ערך אמת $TRUE$ רק אם שני האטומים יקבלו ערך אמת $TRUE$ (באמת הטמפרות יעלו ובאמת הים יהיה סוער). את הקשר "וגם" מסמנים $\wedge$ ומגדירים אותו בצורה פורמלית בעזרת טבלת אמת

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

הגדרה: טבלת אמת של פסוק P התלוי במספר אטומים היא היא טבלא שכל שורה בה מתאימה לאחת מהאפשרות לערכי האמת של האטומים + ערך האמת של P המתאים לאפשרות זאת. למשל טבלת האמת של הקשר "או" ($\vee$) התלוי בשני פסוקים היא

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

כלומר הקשר "או" יקבל ערך אמת F רק אם שני הפסוקים יקבלו ערך F. קשרים בינארים נפוצים נוספים הם: גרירה (חד כיוונית) $\rightarrow$ (אם־ אז), גרירה דו כיוונית $\leftrightarrow$(אמ"מ) ו"או מוציא" $\oplus$ המוגדרים בעזרת טבלת האמת

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
F	F	T	T	F
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	F

והקשר האונרי "שלילה" $\neg p$ או $\bar{p}$ מוגדר בעזרת

p	$\neg p$
F	T
F	T

.

אנחנו נעזרים בפסוקים על מנת להבין מבנה של פסוק, למשל הפסוק "אם לא תאכל יבוא שוטר" מהצורה $(\neg p) \to q$ כאשר p זה האטום "אתה תאכל" ו q "יבוא שוטר". האם ייתכן כי תאכל ויבוא שוטר? כן, נסתכל לפי הטבלא

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$
F	F	T	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	T	F	T

שימו לב כי תנאי אם־אז יקבל F רק אם ה"אם" יתקים ו"אז" לא. אם ה"אם" לא מתקיים הפסוק יהיה T. שימו לב שגם הפסוק "אם לא ירד גשם אלך לעבודה" ו "אם 2 לא מחלק את 10001 אז 10001אי זוגי" מאותה צורה של $(\neg p) \to q$ ולכן מסקנות שנובעות מהמבנה הזה יהיו נכונות לכל אחד מהדוגמאות הנ"ל.

1.2 טאוטולוגיות, שקילות לוגית והוכחות

הגדרה: פסוק p יקרא טאוטולוגיה אם ערך אמת של p הוא T לכל הצבה של האטומים שמעורבים ב p. למשל: $p \vee (\neg p)$ היא טאוטולוגיה. למשל $(p \wedge q) \to p$ היא טאוטולוגיה.
הגדרה: שני פסוקים p, q יקראו שקולים טאוטולוגית/לוגית ונסמן $p \equiv q$ אם יש להם אותה טבלת אמת. הערה: אם $p \equiv q$ אזי $p \leftrightarrow q$ היא טאוטולוגיה. דוגמאות:

1. $p \vee p \equiv p \wedge p \equiv p$
2. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
3. חילופיות: $p * q \equiv q * p$ כאשר $*$ הוא $\wedge, \vee, \oplus, \leftrightarrow$
4. קיבוציות: $(p * q) * r \equiv p * (q * r)$ כאשר $*$ הוא $\wedge, \vee, \oplus, \leftrightarrow$ולכן יש משמעות לכתוב למשל $p \wedge q \wedge r$
5. פילוג: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge p) \vee (q \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
6. $\neg(\neg p) \equiv p$
7. דה מורגן: $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$,$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$
8. $(\neg p \vee q) \equiv (p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$
9. $(p \to q) \wedge (q \to p) \equiv p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$
10. $p \equiv \neg p \to \mathrm{FALSE}$
11. $p \wedge \neg p \equiv \mathrm{FALSE}$,$p \vee \neg p \equiv TRUE$

12. $p \vee \text{FALSE} \equiv p$,$p \wedge TRUE \equiv p$

נוכיח, למשל את מספר 8 ע"י טבלת האמת

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T

תרגיל: הראו בעזרת שקילויות אלו כי $\neg p \equiv (\neg p \wedge q) \vee [\neg (p \vee q)]$.

פתרון: $(\neg p \wedge q) \vee [\neg (p \vee q)] \overset{(1)}{\equiv} (\neg p \wedge q) \vee [\neg p \wedge \neg q] \overset{(2)}{\equiv} \neg p \wedge (q \vee \neg q) \overset{(3)}{\equiv} \neg p \wedge T \overset{(4)}{\equiv} \neg p$
כאשר (1) דה מורגן, (2) פילוג

1.2.1 הוכחות

בקורס שלנו (ובכלל בתואר) נרצה להוכיח משפטים/טענות שאומרות אם $p_1, \ldots, p_n$ אז q. לשם כך נרצה לבצע סדרת גרירות ע"י שימוש בנתונים $p_1, \ldots, p_n$ עד שנגיע למסקנה q. כל גרירה צריכה להיות בעל ערך אמת T. לפעמים נגביל את הגרירות לגרירות מסוימות שיקראו כללי היסק. כללי היסק נפוצים:

1. $p \wedge q \to q$
2. $p \to p \vee q$
3. $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \to q$
4. $[p \wedge (p \to q)] \to q$
5. $[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg q$

למשל: הוכיחו בעזרת כללי היסק אלו בלבד כי אם $p \wedge r$,$p \to q$ אז q. הוכחה: מהנתון $p \wedge r$ נסיק p לפי כללי ההיסק. כעת מ p וגם הנתון $p \to q$ נסיק q לפי כללי ההיסק.

1.3 צורות נורמליות וקבוצת קשרים שלמה

הגדרה 1.1 פסוק P יקרא בצורת DNF אם הוא מהצורה $Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$ כאשר $Q_1, \ldots, Q_m$ מהצורה $x_1^* \wedge x_2^* \cdots \wedge x_n^*$ כאשר x_i^* הוא אטום x_i או השלילה שלו $\neg x_i$.
למשל הפסוקים $p, (p \wedge \neg q), (p \wedge \neg q) \vee r$ הם בצורת DNF.
פסוק P יקרא בצורת CNF אם הוא מהצורה $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_m$ כאשר $Q_1, \ldots, Q_m$ מהצורה $x_1^* \vee x_2^* \cdots \vee x_n^*$ כאשר x_i^* הוא אטום x_i או השלילה שלו $\neg x_i$. למשל הפסוקים $p, (p \wedge \neg q), (p \vee \neg q), (p \vee \neg q) \wedge r$ הם בצורת CNF.

משפט 1.2 משפט: כל פסוק p שקול לוגית לפסוק q שהוא בצורת DNF

הוכחה: נניח p תלוי באטומים $x_1, \ldots, x_n$. נסתכל על שורה i מסוימת בטבלת אמת שבה p מקבל ערך אמת T: לשורה זאת נתאים את הפסוקית $Q_i = x_1^* \wedge x_2^* \cdots \wedge x_n^*$ כאשר

$$x_i^* = \begin{cases} x_i & \text{if } x_i = T \\ \neg x_i & \text{if } x_i = F \end{cases}$$

(למשל אם p תלוי ב x_1, x_2, x_3 שמקבל ערך אמת T בשורה מספר 2

x_1	x_2	x_3	p
F	F	T	T

נתאים לשורה זאת את הפסוקית $Q_2 = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$). מההגדרה של Q_i נקבל ש Q_i יקבל ערך אמת T עבור ההצבות של שורה i ויקבל ערך אמת F בכל ההצבות האחרות. כעת נחזור על בניה זאת לכל אחת מהשורות בהם p שנסמן את מספרם ב $i_1, \ldots, i_m$ ונקבל שהפסוק $Q_{i_1} \vee Q_{i_2} \vee \cdots \vee Q_{i_m}$ שקול לוגית ל p. למה? כי בכל שורה בה p מקבל ערך אמת T נקבל שאחד מה $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots Q_{i_m}$ מקבל ערך אמת Tולכן כל הפסוק ובכל שורה אחרת, כלומר כל שורה ב p מקבל ערך אמת F נקבל כי ערך האמת של כל $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \ldots Q_{i_m}$ הוא F ולכן גם של הפסוק. ■

למשל מצאו את צורת DNF שקולה ל $p \oplus q$.

פתרון: שורה $2,3$ בטבלת האמת

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

מקבלות ערך אמת T. לשורה 2 נתאים את הפסוקית $Q_2 = (\neg p \wedge q)$, לשורה 3 נתאים את $Q_3 = (p \wedge \neg q)$ ונקבל כי $p \oplus q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

מסקנה 1.3 כל פסוק p שקול לוגית לפסוק q בצורת CNF

הוכחה: יהא p פסוק אזי קיים פסוק $q =$ בצורה DNF ששקול לוגית ל $\neg p$ ואז $p \equiv \neg q \equiv \neg(\neg p)$ ו $\neg q$ שקול לפסוק בצורת CNF לפי דה מורגן. ■

למשל כ

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q) \equiv \neg[(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \equiv \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

1.3.1 קבוצת קשרים שלמה

הגדרה 1.4 הגדרה: קבוצת קשרים S תקרא שלמה אם כל פסוק שקול לוגית לפסוק המערב רק קשרים מתוך הקבוצה S. למשל: ממשפט 1.2 נקבל כי $\{\neg, \wedge, \vee\}$ קבוצת קשרים שלמה.

מסקנה 1.5 גם הקבוצה $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}$ שלמות.

כל פסוק שקול לוגית לפסוק שמעורבים בו רק הקשרים $\{\neg, \wedge, \vee\}$, שניתן להחליף "גם" ע"י השקילות הלוגית $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ נקבל כי $\{\neg, \vee\}$ שלמה. (באופן דומה גם $\{\neg, \wedge\}$שלמה)

1.4 פרדיקטים, כמתים ושלילתם

הגדרה 1.6 פרדיקט הוא פונקציה שתלויה במספר משתנים ולכל הצבה במשתנים מתקבל פסוק עם ערך אמת.

למשל הפרדיקט $P(x)$המוגדר $0 < x$ יקבל ערך אמת T עבור ההצבה $P(2)$ ויקבל ערך אמת F עבור $P(0)$. בנוסף, ניתן לכמת על משתנים בעזרת שני הכמתים הבאים:

- הכמת "לכל" $\forall$

- הכמת "קיים" $\exists$

למשל

- הפסוק $\forall x P(x)$ יקבל ערך אמת T אם לכל x מתקיים $x > 0$ וערך אמת F אחרת, כלומר שקיים x עבור $x \leq 0$
- הפסוק $\exists x P(x)$יקבל ערך אמת T אם קיים x עבורו מתקיים $x > 0$ וערך אמת F אחרת, כלומר שלכל x מתקיים $x \leq 0$

נשים לב שבשביל שנוכל לקבוע אם $\forall x P(x)$ מקבל ערך T, צריך לדעת איזה x ים "חוקיים" להצבה. למשל אם האפשרויות ל x הם מתוך $1, 2, \ldots$ אזי הפסוק יקבל ערך T אבל אם x יכול לקבל את הערכים $\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ אז הפסוק יקבל ערך F. נגדיר בצורה יותר מדויקת:

הגדרה 1.7 קבוצה היא אוסף איברים המסומנים בין שני זוגות סוגריים $\{\ldots\}$ כך שאין משמעות לסדר הופעתם ואין משמעות לחזרות של איברים. למשל $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{1, 2, 1\}$. בנוסף, לכל קבוצה A ולכל איבר x נסמן $x \in A$ במידה ו x הוא איבר ב A ואחרת נסמן $x \notin A$. למשל $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ למשל $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

דוגמאות לקבוצות ידועות:

1. הטבעיים $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
2. השלמים $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
3. הרציונאלים ("השברים") $\mathbb{Q}$ שהם אוסף כל האיברים מהצורה $\frac{a}{b}$ עבור $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$
4. הממשיים $\mathbb{R}$ שהם אוסף "כל המספרים על ישר"

במילים אחרות $\forall x P(x)$ מקבל ערך T אם המשתנה x מגיע מקבוצת הטבעיים ו $\forall x P(x)$ מקבל ערך F אם הוא מגיע מקבוצת השלמים.
דוגמא נוספת: נגדיר פרדיקט $EQ(a, b, c, x)$ להיות $ax^2 + bx + c = 0$ ואת הפרדיקט $IQ(a, b, c)$ להיות $0 \leq b^2 - 4ac$ ואז הטענה

$$\forall a \forall b \forall c \left[(IQ(a, b, c) \to (\exists x EQ(a, b, c, x)\right]$$

תקבל ערך אמת T כאשר המשתנים מגיעים מקבוצת הממשיים. הערות:

1. השימוש בקשרים מתרחב גם לפרדיקטים באופן טבעי כמו בדוגמא הנ"ל.
2. שמות המשתנים אינם חשובים, למשל את טענה לעיל יכולה להיות מנוסחת גם כ $\forall m \forall n \forall t \left[(IQ(m, n, t) \to (\exists y EQ(m, n, t, y)\right]$.
3. סדר הכמתים משנה, למשל עבור הפרדיקט $Q(x, y)$ המוגדר להיות $y = x^2$ מתקיים כי $\forall x \exists y : Q(x, y)$ אבל לא מתקיים כי $\exists y \forall x Q(x, y)$ וגם לא מתקיים $\exists x \forall y Q(x, y)$
.

תרגיל: אילו מהבאים הוא פסוק אמת כאשר המשתנים באים מקבוצת הטבעיים, ללא תלות בפרדיקטים:

1. $\forall xP(x) \to \exists xP(x)$ - נכון. אם $\forall xP(x)$ הוא F סיימנו, אחרת $\forall xP(x)$ הוא T ואז בפרט $P(2)$

2. $\forall zP(z) \to \forall x\forall yP(x^2+y^2)$ - נכון.

3. $[\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)] \to \forall x\,[P(x) \wedge Q(x)]$ - נכון.

4. $\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)] \to [\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$- נכון.

5. $[\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)] \to \exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$- לא נכון, למשל $P(x) = (x < 5)\,, Q(x) = (x > 10)$

האם $\forall xP(x) \to \exists xP(x)$ גם עבור קבוצות אחרות השונות מהטבעיים? תשובה: לא, למשל קבוצת כל המספרים הטבעיים הקטנים מאפס (קבוצה ריקה) והפרדיקט $P(x)$ x ראשוני.

1.4.1 שלילת פסוקים

לעיתים נרצה לשלול פסוקים, לשם כך ניעזר בטענה הבא:

משפט 1.8 מתקיים כי $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x), \neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x)$ לכל פרדיקט (כלומר ערך האמת שלהם שווים עבור כל קבוצה) .

למשל: מצאו את השלילה של$\exists x\forall y\,(x \le y)$. פתרון: $\neg\,(\exists x\forall y\,(x \le y)) \equiv \forall x\,(\neg\forall y\,(x \le y)) \equiv$ $\forall x\exists y\,(\neg\,(x \le y)) \equiv \forall x\exists y\,(x > y)$. כלומר מחליפים "לכל" ב"קיים" + שלילת הטענה הסופית.

2 קבוצות

2.1 הגדרות ופעולות בסיסיות

הגדרה 2.1 קבוצה היא אוסף איברים המסומנים בין שני זוגות סוגריים $\{\ldots\}$ כך שאין משמעות לסדר הופעתם ואין משמעות לחזרות של איברים. למשל $\{1,2\} = \{1,1,2\} =$ $\{1,2,1\}$. בנוסף, לכל קבוצה A ולכן איבר x נסמן $x \in A$ במידה ו x הוא איבר ב A ואחרת נסמן $x \notin A$. הכרנו כבר את הקבוצות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. $\emptyset = \{\}$ היא הקבוצה הריקה המקיימת שכל איבר x אינו שייך אליה. למשל $1 \in \mathbb{Z}$ למשל $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}, \emptyset$

דרכים סטדנדריות להגדרה קבוצה:

1. בצורה מפורשת: $A = \{1,3,5,7,\ldots\}$

2. בתיאור כללי: $A = \{\text{Odd numbers}\}$

3. ע"י פורמט $A = \{2k-1|\, k \in \mathbb{N}\} = \{2k-1\}_{k\in\mathbb{N}}$

4. ע"י כלל הפרדה $A = \{x \in \mathbb{N}|\, x \,\text{is odd number}\} = \{x \in \mathbb{N}|\, \exists k \in \mathbb{N} :\ x = 2k-1\}$

הגדרה 2.2 יהיו A, B קבוצות, נאמר כי A מוכלת שווה ל B ונסמן $A \subseteq B$ אם מתקיים $\forall x \in A : x \in B$. A תקרא תת קבוצה (ת"ק) של B.

למשל $\{1\} \subseteq \{1\}\,, \{1\} \subseteq \{1,2\}$, למשל לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$. למשל לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$.

טענה 2.3 יהיו A, B, C קבוצות אזי $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

הוכחה: יהא $x \in A$ צ"ל כי $x \in C$. אכן מהנתון $A \subseteq B$ נקבל כי $x \in B$ ומהנתון $B \subseteq C$ נקבל כי $x \in C$ כנדרש. ■

הגדרה 2.4 יהיו A, B קבוצות אזי $A = B$ אם ורק אם $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ אם ורק אם $\forall x\,(x \in A \iff x \in B)$

טענה 2.5 הוכיחו כי $\{2k|\, k \in \mathbb{Z}\} = \{-2k|\, k \in \mathbb{Z}\}$.

הוכחה: פתרון: $(\subseteq)$ יהא $x \in \{2k|\, k \in \mathbb{Z}\}$ אזי קיים k שלם כך ש $x = 2k$ לכן $x = -2(-k)$ מכיוון ש k שלם גם $-k$שלם ולכן $x = -2(-k) \in \{-2k|\, k \in \mathbb{Z}\}$. $(\supseteq)$יהא $x \in \{-2k|\, k \in \mathbb{Z}\}$ אזי קיים k שלם כך ש $x = -2k$ לכן $x = 2(-k)$ מכיוון ש k שלם גם $-k$שלם ולכן $x = 2(-k) \in \{2k|\, k \in \mathbb{Z}\}$. ■

הגדרה 2.6 יהיו A, B קבוצות אזי:

1. החיתוך שלהם $A \cap B$ מוגדר $A \cap B = \{x|\, x \in A \wedge x \in B\}$. למשל $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
2. האיחוד שלהם $A \cup B$ מוגדר $A \cup B = \{x|\, x \in A \vee x \in B\}$. למשל $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$
3. ההפרש בין A ל B (מסומן $A \backslash B = A - B$) מוגדר $A - B = \{x|\, x \in A \wedge x \notin B\}$. למשל $\{1,2\} - \{2,3\} = \{1\}$
4. ההפרש הסימטרי שלהם $A \triangle B$ מוגדר $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. למשל $\{1,2\} \triangle \{2,3\} = \{1,3\}$

תכונות בסיסיות: יהיו A, B, C קבוצות:

1. $A \cup A = A = A \cap A$
2. $\emptyset \cup A = A,\ \emptyset \cap A = \emptyset$
3. חילופיות $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A, A \triangle B = B \triangle A$
4. קיבוציות $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ולכן יש משמעות יחידה לביטוי $A \cap B \cap C$. עובד גם עם $\cup$ וגם עם $\triangle$.
5. פילוג $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$
7. אם $A, B \subseteq C$ אז $(A \cup B) \subseteq C$

טענה 2.7 יהיו A, B קבוצות אזי $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

הוכחה: נשתמש בטבלת שייכות. יהא x נתון אזי

$x\in A$	$x\in B$	$x\in A\triangle B$	$x\in A\cup B$	$x\in A\cap B$	$x\in (A\cup B)-(A\cap B)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0

■

טענה 2.8 יהיו A,B קבוצות אזי $A\subseteq B \iff A\cap B=A$

הוכחה: $(\Rightarrow)$ יהא $x\in A$ אזי לפי הנתון $x\in A\cap B$ ולכן $x\in B$
$(\Leftarrow)$ ההכלה $(\subseteq)$ ברורה. בכיוון השני $(\supseteq)$ יהא $x\in A$ מהנתון $x\in B$ לכן $x\in A\cap B$
■

הגדרה 2.9 תהא U קבוצה (אוניברסלית) ויהא $A\subseteq U$ ת"ק. אזי נגדיר את המשלים של A (ביחס ל U) להיות $A^c=\bar{A}=U\backslash A=\{x\in U|\, x\notin A\}$.

למשל: $U=\mathbb{N}$ אזי $\{1\}^c=\{2,3,\dots\}$, $\{2k:\ k\in\mathbb{N}\}^C=\{2k-1:\ k\in\mathbb{N}\}$

טענה 2.10 תכונות של משלים: בהניתן U ות"ק A,B

1. $\emptyset^c=U, U^c=\emptyset$
2. $(A^c)^c=A$
3. $A\cup A^c=U,\ A\cap A^c=\emptyset$
4. דה מורגן $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c,\ (A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
5. $A-B=A\cap B^c$

טענה 2.11 יהיו A,B,C קבצות אזי $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

הוכחה: נשתמש בתכונות ונקבל $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c=A\cap(B^c\cup C^c)=$ $(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)=(A-B)\cup(A-C)$ ■

טענה 2.12 יהיו A,B קבצות אזי $B^c\subseteq A^c \iff A\subseteq B$

הוכחה: לבד ■

טענה 2.13 יהיו A,B קבצות. אם $A-B\subseteq B-C$ אז $A\subseteq B$. אם $(A-B)^c\subseteq (B-C)^c$ אז $C^c\subseteq B^c$

הוכחה: לבד ■

2.2 הכללת האיחוד והחיתוך

פעולת החיתוך והאיחוד מוגדרת עבור 2 קבוצות ומתכונות הקיבוציות ראינו שיש משמעות לחיתוך 3 קבוצות.

הכללה ראשונה - איחוד/חיתוך של מספר סופי של קבוצות

הגדרה 2.14 יהיו $A_1,\dots,A_n$ מספר סופי של קבוצות אזי

1. האיחוד שלהם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i \in \{1,\dots,n\} : x \in A_i\}$
2. החיתוך שלהם $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i \in \{1,\dots,n\} : x \in A_i\}$

למשל: לכל $i \in \{1,\dots,10\}$ נגדיר $A_i = \{i-10, i-9, \dots i, i+1\}$ אזי $\cup_{i=1}^{10} A_i = \{-9,-8,\dots,11\}$ והחיתוך $\cap_{i=1}^{10} A_i = \{0,1,2\}$

הכללה שניה - איחוד/חיתוך של מספר כלשהוא של קבוצות

הגדרה 2.15 תהא I קבוצת אינדקסים ויהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות אזי

1. האיחוד שלהם $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$
2. אם $I \neq \emptyset$, החיתוך שלהם $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in i : x \in A_i\}$

למשל: לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_n = \{1,\dots,n\}$ אזי $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ והחיתוך $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}$

תכונה (דה מורגן) : $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c,$. למשל $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \mathbb{N}^c = \emptyset$

2.3 קבוצת חזקה

הגדרה 2.16 תהא A קבוצה אזי קבוצת החזקה מוגדרת $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. למשל $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

הערות:

1. שימו לב, לכל X מתקיים: $X \in P(A) \iff X \subseteq A$
2. $A, \emptyset \in P(A)$ לכל A.

טענה 2.17 תהא A קבוצה סופית בת n איברים אזי מספר האיברים ב $P(A)$ הוא 2^n

הוכחה: ניתן להוכיח זאת באינדוקציה. נוכיח זאת בצורה אחרת, $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ ובנה תת קבוצה B ע"י קביעה אם a_1 נמצא ב B או לא, אם a_2 נמצא ב B או לא וכו'. סה"כ מספר האפשריות להגדיר B בדרך זאת היא $2\cdot 2\cdots 2 = 2^n$ ואלו כל תתי הקבוצות. ■

טענה 2.18 יהיו A, B קבוצות אזי $A \subseteq B \iff P(A) \subseteq P(B)$

הוכחה: בכיוון $(\Leftarrow)$ נתון $A \subseteq B$ צ"ל $P(A) \subseteq P(B)$. יהא $X \in P(A)$ אזי $X \subseteq A$ מהנתון נסיק כי $X \subseteq B$ ולכן $X \in P(B)$
בכיוון $(\Rightarrow)$ נתון $P(A) \subseteq P(B)$ צ"ל $A \subseteq B$. יהא $x \in A$ אזי $\{x\} \subseteq A$ אזי $\{x\} \in P(A)$. לפי הנתון $\{x\} \in P(B)$ ולכן $\{x\} \subseteq B$ ולכן $x \in B$. ■

טענה 2.19 יהיו A, B קבוצות הוכיחו/הפריכו

1. $P(A-B)=P(A)-P(B)$. לא נכון
2. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$. לא נכון.

נסיים עם פרדוקס ראסל: לא יכול קבוצה אוניברסלית U של כל הקבוצות בעולם. למה? נניח שהיתה U והיינו מגדירים $A=\{X\in U \mid X\notin X\}$. השאלה היא האם $A\in A$? אם כן, אז לפי תכונת ההפרדה המגדירה את A נקבל $A\notin A$. אם לא, אז שוב, לפי תכונת ההפרדה שמגדירה את A נקבל כי $A\in A$. מסקנה: צריך להגדיר קבוצה בצורה יותר זהירה, אך זה לא במסגרת הקורס שלנו.

3 שיטות הוכחה

3.1 הנחה בשלילה

- מבנה השאלה: נתונים, טענה שצריך להוכיח
- מבנה ההוכחה: הגעה מ נתונים + שלילת הטענה לסתירה

דוגמא: יהיו A, B קבוצות המקיימות $A-B=B-A$ הוכיחו כי $A=B$
נניח בשלילה כי $A\neq B$. ומכאן שקיים x המקיים $x\in A\wedge x\notin B$ (או להיפך) לכן $x\in A-B$ לכן לפי הנתונים $x\in B-A$ לכן $x\in B$ סתירה.

3.2 הוכחת קיים

- מבנה השאלה: להוכיח $\exists x P(x)$
- מבנה ההוכחה: למצוא x המקיים $P(x)$

דוגמא: תהא A קבוצה. הוכיחו כי קיימת קבוצה B כך ש $A\cap B=A$
פתרון: ניקח $B=A$.
הערה: לעיתים ניתן להוכיח קיום בלי למצוא x מפורשות.

3.3 הוכחת לכל

- מבנה השאלה: להוכיח $\forall x P(x)$
- מבנה ההוכחה: לקחת x שרירותי ולהוכיח שהוא מקיים $P(x)$

דוגמא:הוכיחו כי $\forall x\in\mathbb{R}_+ \exists n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}<x$
פתרון: יהא x ממשי חיובי . נגדיר $n=\min\left\{m\in\mathbb{N}: \frac{1}{x}<m\right\}$ ואז בפרט $\frac{1}{x}<n$ ולכן $\frac{1}{n}<x$

3.4 הכלה דו כיוונית

- מבנה השאלה: להוכיח שיוון בין קבוצות $A = B$
- מבנה ההוכחה:להוכיח $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$

דוגמא: יהיו A, B קבוצות אזי $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
פתרון: $(\subseteq)$ יהא $X \in P(A) \cap P(B)$ אזי $X \in P(A) \wedge X \in P(B)$ אזי $X \subseteq B \wedge X \subseteq A$ אזי $X \subseteq A \cap B$ אזי $X \in P(A \cap B)$. בכיוון $(\supseteq)$ יהא $X \in P(A \cap B)$ אזי $X \subseteq A \cap B$ אזי $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ אזי $X \in P(A) \wedge X \in P(B)$ אזי $X \in P(A) \cap P(B)$

3.5 גרירה חד כיוונית

- מבנה השאלה: להוכיח טענה מהצורה $p \Rightarrow q$
- מבנה ההוכחה: להניח כי בנוסף לנתונים כי p מתקיים ולהוכיח כי q מתקיים

דוגמא: יהיו a, b מספרים ממשיים. הוכיחו כי $\left[a^2 < b^2\right] \Rightarrow [0 < a < b]$
פתרון: נניח כי $0 < a < b$ אזי $a^2 < ab$ כי הכפלנו ב a חיובי. בנוסף $ab < b^2$ כי הכפלנו ב b חיובי. לכן $a^2 < ab < b^2$ כנדרש.

3.6 אמ"מ

- מבנה השאלה: להוכיח טענה מהצורה $p \iff q$
- מבנה ההוכחה:להוכיח $p \Rightarrow q$וגם $p \Leftarrow q$

דוגמא: יהיו A, B קבוצות אזי $A = \emptyset \iff A \triangle B = B$
פתרון: $(\Rightarrow)$נתון: $A \triangle B = B$ צ"ל $A = \emptyset$ נניח בשלילה $A \neq \emptyset$ אזי קיים $x \in A$ אם $x \in B$ אזי הוא צריך להיות גם ב $A \triangle B$ שלא יכול להיות. אם x לא ב B אזי הוא ב $A \triangle B$ ולכן גם ב Bסתירה.$(\Leftarrow)$ נתון: $A = \emptyset$ צ"ל $A \triangle B = B$ אכן $A \triangle B = \emptyset \triangle B = B$

3.7 היפוך גרירה חד כיוונית

- מבנה השאלה: להוכיח טענה מהצורה $p \Rightarrow q$
- מבנה ההוכחה: $\neg q \Rightarrow \neg p$

דוגמא: יהיו a, b מספרים ממשיים המקיימים $a < b$. הוכיחו כי $[c \leq 0] \Rightarrow [bc \leq ac]$
פתרון: נניח כי $c > 0$ ונוכיח $ac < bc$. אכן, כיוון ש c חיובי ו $a < b$ נקבל כי $ac < bc$ כנדרש.

3.8 פישוט המסקנה

- מבנה השאלה: נתוני השאלה גוררים p
- מבנה ההוכחה: לפשט את p

דוגמא: יהיו A,B,C קבוצות כך ש $A\cap B\subseteq C$ ויהא $x\in B$. הוכיחו כי $x\notin A-C$
פתרון: $x\notin A-C$ שקול לטענה $x\in A\Rightarrow x\in C$. נוכיח טענה זאת ע"י שנניח ש $x\in A$ ונוכיח $x\in C$ וזה מתקיים כי $x\in A\cap B\subseteq C$.
דוגמא: יהיו m,n טבעיים כך ש mn זוגי. הוכיחו כי m זוגי או n זוגי.
פתרון: נניח כי m אי זוגי ונוכיח כי n זוגי. לפי הנתונים $mn=2x, m=2t-1$ ולכן $2x=n(2t-1)=2tn-n$ ולכן $n=2tn-2x=2(tn-x)$ זוגי.

3.9 חלוקה למקרים

- מבנה השאלה: טענה כשלהיא של "לכל x"
- מבנה ההוכחה: לחלק ל x עם תנאי מסוים ול x שלא מקיימים את התנאי

דוגמא: הוכיחו שלכל x ממשי אי שלילי ולכל n טבעי מתקיים $\frac{x}{1+n^4x^2}\leq\frac{1}{n^2}$
פתרון: יהא x ויהא n אם $x\leq\frac{1}{n^2}$ אזי $\frac{x}{1+n^4x^2}\leq\frac{x}{1}\leq\frac{1}{n^2}$ אחרת $x>\frac{1}{n^2}$ ואז $\frac{x}{1+n^4x^2}\leq\frac{x}{n^4x^2}=\frac{1}{n^4x}<\frac{1}{n^4\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n^2}$

3.10 שימוש במקרה פרטי

- מבנה השאלה: נתון "לכל k"
- מבנה ההוכחה: להשתמש ב k מסוים

דוגמא: יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ נאמר ש a מחלק את b ($a|b$) אם $\exists x\in\mathbb{N}:\ b=ax$. יהיו a,b טבעים הוכיחו כי $(a|b)\iff\left(\forall k\in\mathbb{N}:a|b^k\right)$.
פתרון: נוכיח רק ($\Rightarrow$) נתון $\forall k\in\mathbb{N}:a|b^k$ נבחר $k=1$ ונקבל $a|b^1$ כנדרש.

3.11 יחידות

- מבנה השאלה: להוכיח כי קיים x יחיד המקיים $P(x)$
- מבנה ההוכחה: להראות כי קיים x המקיים $P(x)$. בנוסף להניח כי x_1,x_2 מקיימים את $P(x)$ ולהראות כי $x_1=x_2$

דוגמא: הוכיחו כי קיימת קבוצה יחידה B המקיימת: $\forall A:\ A\cup B=A$.
פתרון: הקבוצה הריקה מקיימת את הטענה. נניח כעת B_1,B_2 שתיהם מקיימות את הטענה. אזי $B_1=B_1\cup B_2=B_2$

4 אינדוקציה ורקורסיה

4.1 אינדוקציה

שיטה הוכחה חזקה אך פשוטה במתמטיקה נקראת אינדוקציה. אנחנו רוצים להוכיח טענה מהצורה $\forall n\in\mathbb{N}:P(n)$. (למשל $\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$)

משפט 4.1 אם נוכיח כי

1. בסיס האינדוקציה: $P(1)$ מתקיים

2. צעד האינדוקציה: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

אזי $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

הוכחה: נניח בשלילה כי המסקנה אינה נכונה אזי קיים n טבעי כך ש $\neg P(n)$. נגדיר $A = \{m \in \mathbb{N} | \neg P(m)\} \neq 0$ ונגדיר $n_0 = \min A$. כיוון ש $1 \notin A$ נקבל כי $1 < n_0$ ולכן $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ ובנוסף $P(n_0 - 1)$ נכונה לפי הגדרה A. אבל מצעד האינדוקציה נקבל ש $P(n_0)$ מתקיים. סתירה. ∎

נדגים זאת בתרגיל הבא:

טענה 4.2 לכל n טבעי מתקיים $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה
בסיס האינדוקציה: $P(1)$ היא הטענה כי $2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$ שנכונה
צעד האינדוקציה: יהא n טבעי ונניח $P(n)$ כלומר שמתקיים $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. צ"ל $P(n+1)$, כלומר צ"ל $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$. אכן

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} = \left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

כנדרש. ∎

משפט 4.3 הכללה1: אם נוכיח כי

1. בסיס האינדוקציה: $P(k)$ מתקיים, עבור k טבעי כל שהוא
2. צעד האינדוקציה: $\forall k \le n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

אזי $\forall k \le n \in \mathbb{N} : P(n)$

טענה 4.4 לכל $5 \le n$ טבעי מתקיים $n^2 < 2^n$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה
בסיס האינדוקציה: $P(5)$ היא הטענה כי $5^2 = 25 < 2^5 = 32$ שנכונה
צעד האינדוקציה: יהא n טבעי ונניח $P(n)$ כלומר שמתקיים $n^2 < 2^n$. צ"ל $P(n+1)$, כלומר צ"ל $(n+1)^2 < 2^{n+1}$. אכן

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n^2 + n^2 \ge n^2 + 5n \ge n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

כנדרש. ∎

משפט 4.5 הכללה - אינדוקציה חזקה: אם נוכיח כי

1. בסיס האינדוקציה: $P(1)$ מתקיים
2. צעד האינדוקציה: $\forall n \in \mathbb{N} : [\forall k < nP(k)] \Rightarrow P(n)$

אזי $\forall k \le n \in \mathbb{N} : P(n)$. הערה: אפשר לוותר על בסיס האינדוקציה (ע"י הצבה $n = 1$ בצעד האינדוקציה).

טענה 4.6 לכל שני מספרים טבעיים n,m קיימים באופן יחיד שני מספרים טבעיים או אפס q,r כך ש $n=qm+r$ וגם $r<m$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה חזקה על n: עבור $n=1$: אם $m=1$ אזי נוכל לקחת $q=1,r=0<m$ אחרת $m>1$ וניקח $q=0,r=1<m$.
כעת נניח שהטענה מתקיים לכל $k<n$ ונוכיח עבור n: אם $n<m$ נוכל לקחת $q=0,r=$ $n<m$. אחרת $m\leq n$, נגדיר $n'=n-m<n$ לפי הנחת האינדוקציה $n'=q'm+r$ עם $r<m$ ואז $n=n'+m=q'm+r+m=(q'+1)\,m+r$ כנדרש.
כעת נוכיח יחידות. נניח $qm+r=n=q'm+r'$. בה"כ $q'\leq q$ ואז $(q-q')\,m=$ $r'-r<m$ ולכן $q-q'=0$ ולכן $r=r'$ ∎

הערה כללית: אינדוקציה תעבוד עבור גם קבוצות אחרות מהטבעיים. עבור אילו קבוצות לא נרחיב פה אבל אילו קבוצות ש"דומות" לטבעיים כמו $\left\{-2,\frac{1}{2},1,3,4,5,6,\dots\right\}$.

4.2 רקורסיה

נוכל להגדיר סדרה התלויה ב n טבעי בצורה רקורסיבית בצורה הבא:

1. נגדיר תנאי התחלה
2. נגדיר איבר n כללי בסדרה בעזרת איברים שהוגדרו קודם.

למשל נגדיר סדרת מספרים $\{a_n\}_n$ כך: $a_1=1$ ו $a_{n+1}=2a_n+1$ לכל n טבעי.

טענה 4.7 הוכיחו כי עבור סדרת מספרים זאת מתקיים כי $a_n=2^n-1$ לכל n טבעי

הוכחה: בסיס אינדוקציה: $n=1$ מתקיים $a_1=1=2^1-1$
צעד האינדוקציה: נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$: $a_{n+1}=2a_n+1=2\cdot(2^n-1)+1=$ $2^{n+1}-1$ כנדרש. ∎

טענה 4.8 טבלת עם $2^n\times 2^n$ ריבוים ניתן לכסות עם "ר" (או L) בהינתן שמוצאים ריבוע אחד לכל n גדול שווה מאפס.

הוכחה: עבור $n=1$ - ברור. נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$. נחלק את הטבלא ל 4 טבלאות מגודל $2^n\times 2^n$, הריבוע שהוצאנו נמצאת באחד מארבעת הטבלאות הנ"ל, נוסיף עוד כיסוי L על במפגש הטבלאות כך שנוציא ריבוע אחד מכל אחת משלושת הטבלאות הנוספות. כעת קיבלנו 4 טבלאות שחסר בהם ריבוע אחד ולכן לפי הנחת האינדוקציה ניתן לכסות אותם ב L ים. ∎

מסקנה 4.9 לכל n טבעי נקבל כי $3|2^n-1$

טענה 4.10 לכל A בת n איברים מתקיים כי $P(A)$ בת 2^n איברים.

הוכחה: עבור $n=0$ נקבל כי $A=\emptyset$ ו $P(A)=\{\emptyset\}$ והטענה מתקיימת. כעת נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$. תהא $A=\{a_1,\dots,a_n.a_{n+1}\}$ קבוצה בת $n+1$ איברים. נסמן $A'=A\backslash\{a_{n+1}\}=\{a_1,\dots,a_n\}$ לפי הנחת האינדוקציה ב $P(A')$ יש 2^n איברים. כעת

$$P(A)=\{X\in P(A)|\,a_{n+1}\in X\}\cup\{X\in P(A)|\,a_{n+1}\notin X\}$$

ואין חיתוך בין קובצות אלו ולכן מספר האיברים ב $P(A)$ הוא מספר האיברים ב $\{X \in P(A)|\, a_{n+1} \in X\}$ + מספר האיברים ב $\{X \in P(A)|\, a_{n+1} \notin X\}$. מתקיים כי

$$\{X \in P(A)|\, a_{n+1} \notin X\} = P(A')$$

$$\{X \in P(A)|\, a_{n+1} \in X\} = \{X' \cup \{a_{n+1}\} \,|\, X' \in P(A')\}$$

לכן מספר האיברים בשני הקבוצות שווה והוא שווה למספר האיברים ב $P(A')$ ולכן מספר האיברים ב $P(A)$ הוא הסכום של שניהם שהוא $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ כנדרש. ■

5 יחסים

הגדרה 5.1 יהיו a, b איברים. נגדיר את הזוג הסדור $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$. מהגדרה זאת נובע כי לכל a, a', b, b' איברים מתקיים כי $(a = a') \wedge (b = b') \iff (a,b) = (a',b')$.
הערה: בזוג סדור (a,b) יש משמעות לחזרות ולסדר, למשל $(1,2) \neq (2,1)$ ויש משעות ל $(1,1)$.

יהיו A, B קבוצות אזי המכפלה הקרטיזית בניהם מוגדרת $A \times B = \{(a,b) \,|\, a \in A \times B\}$.
למשל עבור $A = \{1,2\}, B = \{1,2,3\}$ נקבל $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$.
עבור $A = [1,2], B = [-1,1]$ נקבל ריבוע ב $\mathbb{R}^2$.

טענה 5.2 עבור A, B, C, D מתקיים כי

1. $\emptyset \times A = \emptyset = A \times \emptyset$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
5. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

הוכחה: נוכיח כי $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. $(\subseteq)$ יהא $(a,y) \in A \times (B \cup C)$ כאשר $a \in A \wedge y \in B \cup C$ אזי אם $y \in B$ נקבל $(a,y) \in A \times B$ ואם $y \in C$ נקבל $(a,y) \in A \times C$ ולכן בכל מקרה $(a,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. בכיוון השני $(\supseteq)$ יהא $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$ אזי $x \in (A \times B) \vee x \in (A \times C)$ ולכן $x = (a,b) \vee x = (a,c)$ ולכן $x \in A \times (B \cup C)$ ■

הגדרה 5.3 יהא $2 \leq n$ טבעי ויהיו $a_1, \ldots, a_n$ איברים אזי נגדיר nיה סדורה ברקורסיה

$$(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} (a_1, a_2) & n = 2 \\ (a_1, (a_2, \ldots, a_n)) & 2 < n \end{cases}$$

בנוסף מתקיים כי $[\forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i = b_i] \iff (a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$.

למשל $\mathbb{R}^3$ זה קבוצת השלשות הסדורות (x,y,z) עבור x, y, z ממשיים.

הגדרה 5.4 יהיו A,B קבוצות אזי $R\subseteq A\times B$ נקראה יחס מ A ל B. אם $A=B$ אזי R יקרא יחס על A.

דוגמא: $A=\{1,2\},B=\{1,2,3\}$ אזי $R_1=A\times B$ הוא יחס, $R_2=\{(1,1),(1,3)\}$ הוא יחס, $R_3=\emptyset$ הוא יחס (שימו לב כי יש 2^6 יחסים). גם $R_{\leq}=\{(a,b)\,|\,a\leq b\}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$ הוא יחס, במקום R_4 יותר טבעי לכתוב את הקבוצה ב $\leq=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$. ומכאן טבעי לסמן:

הערה 5.5 עבור $R\subseteq A\times B$ יחס ועבור $(a,b)\in R$ נסמן aRb. בדוגמא של $R_{\leq}$ נסמן $1R_{\leq}2$ או בסימון השני $1\leq 2$

יהא R יחס על A אזי:

1. R יקרא רפלקסיבי אם $\forall a\in A:\ aRa$
2. R יקרא סימטרי אם $\forall a_1,a_2\in A:\ [a_1Ra_2]\Rightarrow[a_2Ra_1]$
3. R יקרא טרנזיטיבי $\forall a_1,a_2,a_3\in A:\ [a_1Ra_2\wedge a_2Ra_3]\Rightarrow[a_1Ra_3]$

דוגמאות:

1. למשל $A=\{1,2,3\}$

- היחס $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ הוא רפלקסיבי, לא סימטרי וטרנזיטבי
- היחס $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\,(2,3),(1,3)\}$ הוא לא רפלקסיבי, לא סימטרי וטרנזיטבי
- היחס $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\,(2,1),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ הוא רפלקסיבי, סימטרי ולא טרנזיטבי

2. עבור A קבוצה

(א) יחס הזהות $I_A=\{(a,a)\,|\,a\in A\}$ הוא רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי

(ב) היחס הריק $\emptyset$ הוא לא רפלקסיבי (אם $A\neq\emptyset$) , סימטרי וטרנזיטיבי

5.1 יחסי שקילות

הגדרה 5.6 יחס R על A יקרא יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמא: יהא n טבעי ונגדיר יחס $\equiv_n$ (מודולו n) על $\mathbb{Z}$ כך: לכל $x,y\in\mathbb{Z}$

$$x\equiv_n y\,(x=y\mod n)\iff n|\,(x-y)\iff\frac{x-y}{n}\in\mathbb{Z}$$

נוכיח כי זהו יחס שקילות:

1. רפלקסיבי: לכל x מתקיים $n|x-x=0$
2. סימטרי: נניח $x\equiv_n y$ אזי $n|x-y$ אזי $n|-(x-y)=y-x$ אזי $y\equiv_n x$
3. טרנזיטיביות: נניח $x\equiv_n y,y\equiv_n z$ אזי $n|x-y,y-z$ ולכן גם $n|\,(x-y)+(y-z)=x-z$ ולכן $x\equiv_n z$

יהא R יחס שקילות על A אזי

1. לכל $a \in A$ מחלקת השקילות של a היא $[a]_R = \{a' \in A : aRa'\}$
2. קבוצת המנה מוגדרת $A/R = \{[a]_R | \, a \in A\}$

למשל ביחס מודלו 2 נקבל

$$[2]_{\equiv_2} = [0]_{\equiv_2} = \{x \in \mathbb{Z} | \, 2|0 - x\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1]_{\equiv_2} = \{x \in \mathbb{Z} | \, 2|1 - x\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots,\} = \{2k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$$

וקבוצת המנה היא $\mathbb{Z}/\equiv_2 = \{[0], [1]\}$, כלומר , כל קבוצת השאריות האפשריות בחלקה ב .2

משפט 5.7 יהא R יחס שקילות על A אזי לכל $x, y \in A$ מתקיים

$$xRy \iff y \in [x]_R \iff [x]_R = [y]_R$$

הוכחה: יהיו $x, y \in A$ אזי $y \in [x]_R \iff xRy$ לפי הגדרת מחלקת שקילות. נוכיח את השקילות $[x]_R = [y]_R \iff y \in [x]_R$.
בכיוון $(\Rightarrow)$ $(\subseteq)$יהא $z \in [x]$ אזי xRz. נתון כי xRy ולכן גם yRx. מטרנזיטיבות של R נקבל yRz ולכן $z \in [y]$
$(\supseteq)$יהא $z \in [y]$ אזי yRz. נתון xRy ולכן מטרנזיטיביות של R גם xRz ולכן $z \in [x]$
בכיוון $(\Leftarrow)$ נתון $[x] = [y]$. כיוון ש R רפלקסיבי yRy ולכן $y \in [y]$ ומהנתון $y \in [x]$ ■

משפט 5.8 יהא R יחס שקילות על A אזי

1. לכל $x \in A$ מתקיים $[x] \neq \emptyset$
2. לכל $x, y \in A$ מתקיים $([x] = [y]) \vee ([x] \cap [y] = \emptyset)$
3. $A = \bigcup_{[x] \in A/R} [x]$

הוכחה: כיוון ש $x \in [x]$ מחלקת שקילות $[x]$ אינה ריקה. כעת יהיו $x, y \in A$ ונניח $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ אזי קיים $z \in [x] \cap [y]$ ולכן $z \in [x] \wedge z \in [y]$ ממשפט 5.7 נקבל כי $[x] = [z] = [y]$.
נסיים בהוכחת $A = \bigcup_{[x] \in A/R} [x]$. הכיוון $(\supseteq)$ברור כי $A \subseteq [x]$. נוכיח $(\subseteq)$ יהא $a \in A$ אזי $a \in [a]$ ולכן a באיחוד. ■

למשל במודלו 3 נקבל כי $[0], [1], [2]$ זרות בזוגות והאיחוד שלהם הוא כל השלמים.

הגדרה 5.9 תהא A קבוצה. אוסף קבוצות $\{A_i\}_{\in I}$ יקרא חלוקה של A אם

1. לכל $i \in I$ מתקיים כי $A_i \neq \emptyset$
2. הם זרות בזוגות, כלומר לכל $i \neq j \in I$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$

3. $A=\bigcup_{i\in I}A_i$

מסקנה 5.10 יהא R יחס שקילות על A אזי ${}^{A}\!/\!_{R}$ הוא חלוקה של A.

נרצה למצוא קשר גם בכיוון ההפוך ־כלומר בהינתן חלוקה על A למצוא יחס שקילות כך שקבוצת המנה = לחלוקה. למשל עבור $A=\{1,2,3,4\}$ והחלוקה $\{A_1=\{1,3,4\},A_2=\{2\}\}$

משפט 5.11 תהא A קבוצה. תהא $\{A_i\}_{i\in I}$ חלוקה של A. אזי

1. נגדיר את היחס המושרה מהחלוקה להיות $R=\bigcup_{i\in I}A_i\times A_i$ (או באופן שקול $xRy\iff\exists i\in I:\,x,y\in A_i$) אזי R יחס שקילות על A
2. מתקיים ${}^{A}\!/\!_{R}=\{A_i\}_{i\in I}$ כאשר R הוא היחס המושרה מהחלוקה

הוכחה: נוכיח כי R יח"ש. רפלקסיבי: לכל $x\in A$ קיים $i\in I$ כך ש $x\in A_i$ לכן $(x,x)\in A_i\times A_i$ ולכן $(x,x)\in R$. סימטריות: נניח xRy אזי קיים $i\in I$ המקיים $(x,y)\in A_i\times A_i$ ולכן $(y,x)\in A_i\times A_i$ ולכן yRx. טרנזיטיביות: נניח xRy,yRz אזי קיימים $i,j\in I$ כך ש $(x,y)\in A_i\times A_i,(y,z)\in A_j\times A_j$ ואז $y\in A_i\cap A_j$ כיוון שהקבוצות זרות בזוגות נקבל כי $i=j$ ולכן $x,y,z\in A_i$ ולכן $(x,z)\in A_i$ ולכן xRz.
לסעיף השני: יהא $[x]\in{}^{A}\!/\!_{R}$ אזי קיים i יחיד כך ש $x\in A_i$ ולכן $[x]=A_i$. מצד שני לכל i מתקיים כי A_i אינה ריקה ולכן קיים $x\in A_i$ ולכן $[x]=A_i$ ■

למשל $A=\{1,2,3,4\}$ והחלוקה $\{A_1=\{1,3,4\},A_2=\{2\}\}$ היחס המושרה מהחלוקה הוא $R=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)=\{(1,1),(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}\cup\{(2,2)\}$ וקבוצת המנה היא ${}^{A}\!/\!_{R}=\{[3]=A_1,[2]=A_2\}$.

תרגיל 5.12 כמה יחסי סדר יש על $A=\{1,2,3,4\}$?

הוכחה: זה שקול לספור חלוקות של A. כמה חלוקות יש עם קבוצה אחת [1] + כמה חלוקות יש עם שתי קבוצות [7] + כמה חלוקות יש עם שלוש קבוצות [6] + כמה חלוקות יש עם 4 קבוצות [1] = סה"כ 15 חלוקות ■

תרגיל 5.13 תהא A קבוצה ו $\sim$ יחס שקילות עליה. נניח שקיימים 4 איברים שונים $a_1,a_2,a_3,a_4\in A$ המקיימים את התכונה הבאה: לכל $x\in A$ קיים i $(1\le i\le 4)$ כך ש $x\sim a_i$.
מה הגדלים האפשריים לקבוצת המנה ${}^{A}\!/\!_{\sim}$? עבור כל גודל אפשרי, תנו דוגמא בה זה מתקיים.

הוכחה: כל גודל מ־1 עד 4. נימוק: כיוון שכל $x\in A$ מתייחס לאחד מa_1,a_2,a_3,a_4 אזי קבוצת המנה היא ${}^{A}\!/\!_{\sim}=\{[a_1],[a_2],[a_3],[a_4]\}$ וכל השאלה האם רשמנו איברים כפולים (למשל האם $[a_1]=[a_2]$) .
דוגמאות: עבור $1\le i\le 4$ נוכל לקחת את היחס על $\mathbb{N}$ המוגדר להיות מודולו i כלומר היחס $R_i=\{(n,m)\in\mathbb{N}^2\;:\;i\mid n-m\}$ ואז יתקיים כי ${}^{\mathbb{N}}\!/\!_{R_1}=\{[0]\},{}^{\mathbb{N}}\!/\!_{R_2}=\{[0],[1]\},{}^{\mathbb{N}}\!/\!_{R_3}=\{[0],[1],[2]\},{}^{\mathbb{N}}\!/\!_{R_4}=\{[0],[1],[2],[3]\}$ ■

תרגיל 5.14 נגדיר יחס $\sim$ על $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ כך $x+y'=x'+y\iff(x,y)\sim(x',y')$. הוכיחו כי $\sim$ יח"ש. מצאו את קבוצת המנה והקשר של ל $\mathbb{Z}$

הוכחה: רפלקסיביות: $(x,y)\sim(x,y)$ כי $x+y=x+y$. סימטריות: אם $(x,y)\sim(x',y')$ אז $x+y'=x'+y$ ולכן $x'+y=x+y'$ ולכן $(x',y')\sim(x,y)$. טרנז': תרגיל. קבוצת המנה

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim \;=\{[(1,1+a)]:\,a\in\mathbb{N}\}\cup\{[(1+a,1)]:\,a\in\mathbb{N}\}\cup\{[(1,1)]\}$$

כלומר כל הפרש בין (x,y) יכול להתקיים והוא שקול לאחד מהנ"ל. ■

5.2 יחסי סדר

הגדרה 5.15 יחס R על קבוצה A יקרא אנטי סימטרי (חלש) אם $\forall a,a'\in A:\;[(aRa')\wedge(a'Ra)]\Rightarrow a=a'$. כלומר אין שני איברים שונים שמתייחסים זה לזה.

למשל היחס $R=\{(1,2),(2,1)\}$ אינו אנטי סימטרי. היחסים $R=\{(1,2)\},\emptyset$ יחסים אנטי סימטרים.

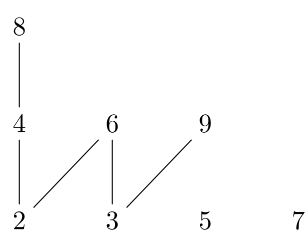
הגדרה 5.16 יחס R על קבוצה A יקרא יחס סדר (חלש) אם R הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי. מינוח: A סדורה חלקית ע"י R, (A,R) קס"ח (קבוצה סדורה חלקית).

למשל:

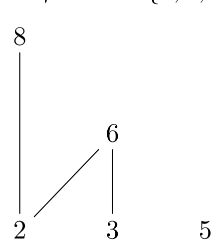
- היחס קטן שווה על $A=\{1,2,3\}$ הוא היחס $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
  - היחס "מוכל שווה" על $P(\{1\})$ הוא היחס $R=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\{1\},\{1\})\}$

הערות:

- יחס סדר R ניתן להביע באמצעות דיאגרמת הסה. בדיאגרמת הסה מופיעים כל איברי הקבוצה כאשר אם x מחובר בקו ל y מעליו הכוונה היא ש xRy. למשל היחס "מחלק את" על הקבוצה $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ניתן להבעה ע"י דיאגרמת הסה



- תהא (A,R)קס"ח ותהא $B\subseteq A$ ת"ק. היחס המורשה על B הוא היחס $R'=R\cap(B\times B)$ ומתקיים כי (B,R') הוא קס"ח. למשל היחס "מחלק את" על הקבוצה $B=\{2,3,5,6,8\}\subseteq\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ניתן להבעה ע"י דיאגרמת הסה

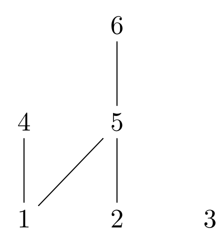


- יחסי סדר מסמנים לעיתים ב $\leq$ ועבור זוג xRy (או בסימון אחר $x \leq y$) נאמר כי x קטן שווה מ y וכו'

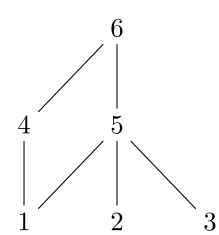
הגדרה 5.17 תהא $(A,\leq)$ קס"ח

1. איבר $x \in A$ יקרא איבר מקסמאלי אם מתקיים $\forall y \in A : x \leq y \Rightarrow x = y$ (כלומר אין איבר גדול ממש מ x ב A)
2. איבר $x \in A$ יקרא איבר גדול ביותר אם מתקיים $\forall y \in A : y \leq x$ (כלומר x גדול מכל האחרים)
3. איבר $x \in A$ יקרא איבר מינימאלי אם מתקיים $\forall y \in A : y \leq x \Rightarrow x = y$ (כלומר אין איבר קטן ממש מ x ב A)
4. איבר $x \in A$ יקרא איבר קטן ביותר אם מתקיים $\forall y \in A : x \leq y$ (כלומר x קטן מכל האחרים)

למשל ביחס



האיברים $1,2,3$ מינמאלים, $3,4,6$ מקסימאלים. וביחס

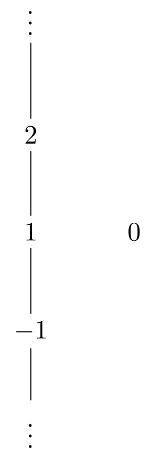


האיבר 6 הוא הגדול ביותר והוא המקסמאלי היחידי, $1,2,3$ מינמאלים.

הערה 5.18

1. תהא $(A,\leq)$ קס"ח. לפעמים נתייחס לאיבר מקס'/מינ'/קטן וגדול ביותר ביחס ל $B \subseteq A$ והכוונה היא ליחס המושרה.
2. לא תמיד קיימים איבר קטן/גדול ביותר.

3. אם x מינמאלי יחיד אז לא בהכרח כי x קטן ביותר. למשל



4. אם $(A,\leq)$ קס"ח ו A קבוצה סופית לא ריקה אזי קיים איבר מינמאלי (וקיים איבר מקס').
הוכחה: באינדוקציה על $n=|A|$. עבור $n=1$ נקבל $A=\{a\}$ ו a איבר מימאלי. נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$. תהא $A=\{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}\}$ קבוצה בת $n+1$ איברים. לפי הנחת האינדוקציה קיים איבר $x\in\{a_1,\dots,a_n\}$ מינמאלי. כעת אם $a_{n+1}\leq x$ נקבל כי a_{n+1} מימאלי ב A ואחרת x מינמאלי ב A.

משפט 5.19 תהא $(A,\leq)$ קס"ח. אזי

1. אם $x\in A$ קטן ביותר אז הוא יחיד.
2. אם $x\in A$ קטן ביותר אזי הוא מינמאלי והוא המינמאלי היחיד.

הוכחה: יהא $x_1,x_2\in A$ קטנים ביותר. אזי $x_1\leq x_2$ בגלל ש x_1 קטן ביותר ו $x_2\leq x_1$ בגלל ש x_2 קטן ביותר. בגלל ש $\leq$ אנטי סימטרי נקבל כי $x_1=x_2$.
כעת יהא $x\in A$ הקטן ביותר ונראה שהוא מינמאלי. אכן יהא $y\in A$ המקיים $y\leq x$ (צ"ל $x=y$) כיוון ש x קטן ביותר אזי $x\leq y$ וביחד עם אנטי סימטריות של $\leq$ נקבל $x=y$ כנדרש. כעת יהיה y מינמאלי. בגלל ש x קטן ביותר נקבל $x\leq y$ ובגלל ש yמינימאלי נקבל $x=y$ מה שאומר ש xמינמאלי יחיד ■

הערה 5.20 1) אם $x\in A$ מינמאלי אזי לא בהכרח שהוא קטן ביותר כמו בדומא לעיל.
2) המשפט נכון גם עבור גדול ביותר ומקסמאלי בהתאמה.

הגדרה 5.21 תהא $(A,\leq)$ קס"ח. $\leq$ יקרא יחס סדר קווי אם $\forall x,y\in A: x\leq y\vee y\leq x$, כלומר כל שני איברים מ A ברי השוואה. במקרה זה נאמר כי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה קווית

דוגמא: קטן שווה על $\mathbb{R}$.

משפט 5.22 יהא $(A,\leq)$ קבוצה סדורה קווית ויהא $x\in A$ איבר מינמאלי. אזי x קטן ביותר.

הוכחה: יהא $y\in A$ אזי כיוון ש $\leq$ קווי נקבל כי $x\leq y\vee y\leq x$ אם $x\leq y$ סיימנו. אחרת $y\leq x$ כיוון ש x מינמאלי נקבל כי $y=x$ ובפרט $x\leq y$ כנדרש. ■

הגדרה 5.23 תהא $(A,\leq)$קס"ח ותהא $B\subseteq A$ ת"ק.

1. איבר $x\in A$ יקרא חסם מלעיל של B אם $\forall y\in B:\, y\leq x$
2. איבר $x\in A$ יקרא חסם מלרע של B אם $\forall y\in B:\, x\leq y$

למשל $\left(\left\{\frac{1}{n}|\, n\in\mathbb{N}\right\},\,\leq\right)$ חסומה מלרע ע"י $-100,0$ וחסומה מלעיל ע"י $1,100$

הגדרה 5.24 תהא $(A,\leq)$קס"ח ותהא $B\subseteq A$ ת"ק.

1. איבר $x\in A$ יקרא החסם העליון של B ויסומן $\sup B$ אם הוא איבר הקטן ביותר בקבוצת חסמי המלעיל של B.
2. איבר $x\in A$ יקרא החסם התחתון של B ויסומן $\inf B$ אם הוא איבר הגדול ביותר בקבוצת חסמי המלרע של B.

למשל ב $(\mathbb{R},\leq)$ ו $B=\left\{\frac{1}{n}|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ החסם עליון הוא 1 , החסם תחתון הוא 0. למשל $A=\{X\subseteq\{1,2,3\}\,|\,X\neq\emptyset\}$ סדורה ע"י הכלה והקבוצה $B=\{\{1\},\{2\}\}$ אזי $\sup B=\{1,2\}$ ו $\inf B$ לא קיים (כי הקבוצה היחידה שמוכלת בכל איבר של B היא הקבוצה הריקה).

טענה 5.25 תהא $(P(A),\subseteq)$ קס"ח עבור קבוצה כלשהיא A. יהיו $\{A_i\}_{i\in I}\subseteq P(A)$ אוסף לא ריק של תתי קבוצות של A אזי $\sup\{A_i\}_{i\in I}=\bigcup_{i\in I}A_i,\ \inf\{A_i\}_{i\in I}=\bigcap_{i\in I}A_i$

הוכחה: לכל $A_j\in\{A_i\}_{i\in I}$ מתקיים כי $A_j\subseteq\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$ ולכן $\bigcup_{i\in I}A_i$ "גדול שווה" מכל איבר בקבוצה $\{A_i\}_{i\in I}$ ולכן הוא חסם מלעיל של הקבוצה. בנוסף, יהא חסם מלעיל אחר של הקבוצה B ונראה כי $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq B$. אכן מכך ש B חסם מלעיל של הקבוצה נקבל כי לכל $A_j\in\{A_i\}_{i\in I}$ מתקיים כי $A_j\subseteq B$ ולכן $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq B$ כנדרש. ההוכחה של החיתוך דומה ונשאיר אותה לקורא ■

תרגיל 5.26 תהא $A=\{(a_1,a_2,a_3):\, a_1,a_2,a_3\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}^3$. נגדיר יחס $\leq$ על A כך

$$(a_1,a_2,a_3)\leq(b_1,b_2,b_3)\iff\forall i\in\{1,2,3\}:\, a_i\leq b_i$$

1. הוכיחו כי $\leq$ יחס סדר על A
2. מצאו $m\in A$ איבר קטן ביותר
3. מצאו איברים מינמאלים ב $A\backslash\{m\}$
4. מצאו $\sup B,\inf B$ עבור $B=\left\{\left(5,1,10^5\right),(10,3,30),(15,16,15)\right\}$

הוכחה: נשאיר כתרגיל כי $\leq$ הוא יחס סדר. $m=(1,1,1)$ הוא האיבר הקטן ביותר כי לכל $A \in (a_1,a_2,a_3)$ מתקיים $(1,1,1) \leq (a_1,a_2,a_3)$. בקבוצה $A\backslash\{m\}$ האיברים המינמאלים הם אלו שיש להם שתי 1 ואחד 2, כלומר $(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)$. לסיום

$$\sup B=\left(\max\{5,10,15\},\max\{1,3,16\},\max\left\{10^5,30,15\right\}\right)=\left(15,16,10^5\right)$$

ו $\inf B$ יהיה באופן דומה ה $\min$ בכל קורדינאטה. ■

תרגיל 5.27 תהא $(A,\leq)$ קס"ח. תהא B ת"ק אינה ריקה. אם קיימים $\sup B,\inf B$ אזי $\inf B \leq \sup B$

הוכחה: B אינה ריקה ולכן קיים $b\in B$. לפי הגדרה $\inf B \leq b \leq \sup B$ ומטרנזיטיביות $\leq$ נקבל את המבוקש. ■

תרגיל 5.28

נגדיר $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$. עוד נגדיר $\mathbb{O}$ להיות קבוצת כל יחסי השקילות על X. נגדיר יחס $\preceq$ מעל $\mathbb{O}$ באופן הבא. לכל $R_1,R_2\in\mathbb{O}$ שני יחסי שקילות על X מתקיים

$$R_1 \preceq R_2 \iff \left(\left|{}^{X}\!/_{R_1}\right| < \left|{}^{X}\!/_{R_2}\right|\right) \vee (R_1=R_2)$$

כאשר $\left|{}^{X}\!/_{R_1}\right|$ פירושו מספר האיברים בקבוצת המנה של היחס R_1.

1. הוכיחו כי $\preceq$ הוא יחס סדר על $\mathbb{O}$. (15 נקודות)

פתרון: רפלקסיבי: ברור. אנטי סימטרי: נניח $(R_1\preceq R_2)\wedge(R_2\preceq R_1)$. נניח בשלילה כי הם שונים אזי $\left|{}^{X}\!/_{R_1}\right| < \left|{}^{X}\!/_{R_2}\right|$ וגם $\left|{}^{X}\!/_{R_2}\right| < \left|{}^{X}\!/_{R_1}\right|$ סתירה.

טרנזיטיבי: נניח $R_1\preceq R_2,\ R_2\preceq R_3$ אזי במידה שהם שונים זה מזה נקבל כי

$$\left|{}^{X}\!/_{R_1}\right| < \left|{}^{X}\!/_{R_2}\right|, \left|{}^{X}\!/_{R_2}\right| < \left|{}^{X}\!/_{R_3}\right|$$

ומטרנזיטיביות על מספרים טבעיים נקבל כי

$$\left|{}^{X}\!/_{R_1}\right| < \left|{}^{X}\!/_{R_3}\right|$$

שזה גורר $R_1\preceq R_3$. במידה ויש שיוון בין $R_1=R_2$ או $R_2=R_3$ הטרנזיטיביות ברורה.

2. האם זהו יחס קווי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הפריכו ע"י דוגמא. (15 נקודות)

פתרון: לא. למשל R_1 המוגדר ע"י החלוקה

$$P_1=\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\}\}$$

לא מתייחס ל R_2 המוגדר ע"י החלוקה

$$P_2=\{\{1,2,3,4,6\},\{5,7,8,9,10\}\}$$

וכן לא להפיך. למה? כי ${}^{X}\!/_{R_1}=P_1, {}^{X}\!/_{R_2}=P_2$ והגדלים שלהם שווים ולכן לא מתקיים $R_1\preceq R_2$ וגם לא מתקיים $R_2\preceq R_1$

3. מצאו, אם קיימים, איבר קטן ביותר ב$(\mathbb{O}, \preceq)$ ואיבר גדול ביותר ב $(\mathbb{O}, \preceq)$ (15 נקודות)
פתרון: מתקיים כי לכל R יחס שקילות על X כי

$$1 \leq |{}^{X}/_{R}| \leq 10$$

כי ${}^{X}/_{R}$ חלוקה של X. נגדיר I_X להיות יחס הזהות אזי

$$|{}^{X}/_{I_X}| = 10$$

כי כל מחלקת שקילות היא מגודל 1.

טענה: זהו איבר גדול ביותר. הוכחה: כל יחס שקילות אחר R אם הוא מקיים

$$|{}^{X}/_{R}| < 10$$

אזי $R \preceq I_X$. ואם $|{}^{X}/_{R}| = 10$ אזי קיימות 10 מחלקות שקילות . כיוון ש $x \in [x]_R$ אזי כל מחלקת שקילות היא לפחות מגדול אחד. כיוון שיש 10 איברים ב X זה אומר שגודל מחלקת שקילות היא בדיוק אחד ולכן זהו יחס הזהות.

נגדיר $S = X \times X$ להיות היחס המלא אזי $|{}^{X}/_{S}| = 1$כי כולם מתייחסים אחד לשני.
טענה: זהו איבר קטן ביותר. הוכחה: כל יחס שקילות אחר R אם הוא מקיים

$$1 < |{}^{X}/_{R}|$$

אזי $S \preceq R$. ואם $|{}^{X}/_{R}| = 1$ אזי קיימת מחלקת שקילות אחת. זה אומר שכל האיברים ב X מתייחסים אחד לשני ולכן $R = S$.

6 פונקציות

הגדרה 6.1 יחס $f \subseteq A \times B$ מ A ל B יקרא פונקציה אם:

1. f שלם: $\forall x \in A \exists y \in B : xfy$
2. f חד ערכי: $\forall x \in A, y_1, y_2 \in B : [xfy_1 \wedge xy_2] \Rightarrow y_1 = y_2$

כלומר f היא פונקציה אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ יחיד כך ש xfy. במקרה זה מסמנים $f(x) = y$ ו x נקרא המקור של y ו y נקרא התמונה של x. מינוחים וסימונים: A נקרא התחום ו B נקרא הטווח של f ומסמנים $f : A \to B$.

הערה 6.2 שני פונקציות $f, g : A \to B$ שוות אמ"מ $\forall x \in A : f(x) = g(x)$

הגדרה 6.3 תהא $f : A \to B$ פונקציה. התמונה של f הוא $Im(f) = \{f(x) : a \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\} \subseteq B$.

1. f תקרא על אם $Im(f) = B$. כלומר $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$
2. f תקרא חד חד ערכית אם $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ או באופן שקול $\forall x_1, x_2 \in A\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

למשל $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(x)=x^2+2$ מקיימת כי התמונה של 3 הוא 11דהיינו $f(3)=11$, הפונקציה חח"ע ולא על.
למשל $f:\mathbb{Z}\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$ המוגדרת $m\mapsto|m|$ על אך אינה חח"ע $f(2)=f(-2)$
למשל עבור קבוצה A פונצית הזהות $I_A:A\to A$ מוגדרת $\forall a\in A:\ I_A(a)=a$. שימו לב שזהו יחס השיוויון $I_A=\{(a,a):\ a\in A\}$.
למשל תהא $f:A\to B$ פונקציה. נגדיר $\tilde{f}:A\to Im(f)$ להיות $a\mapsto f(a)$ אזי $\tilde{f}$ פונקציה על.

משפט 6.4 יהיו A,B קבוצות סופיות. אזי קיימת $f:A\to B$ חח"ע אמ"מ $|A|\le|B|$

הוכחה: $(\Rightarrow)$ אם A קבוצה ריקה אזי קיימת פונקציה יחידה מ A ל B שהיא $\emptyset$ והיא חח"ע. אחרת נסמן $A=\{a_1,\ldots,a_m\},B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ כך שאלו איברים שונים ו $m\le n$. נגדיר פונקציה $f:A\to B$ ע"י $f(a_i)=b_i$ לכל $1\le i\le m$ והיא חח"ע. $(\Leftarrow)$ נניח שקיימת $f:A\to B$ חח"ע. אם $A=\emptyset$ אזי מתקיים $|A|\le|B|$ אחרת $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ כאשר אלו איברים שונים ואז $Im(f)=\{f(a_i):\ 1\le i\le m\}\subseteq B$ בעלת m איברים שונים כי f חח"ע ולכן ב $|A|=m\le|B|$ ■

משפט 6.5 יהיו A,B קבוצות סופיות לא ריקות. אזי קיימת $f:A\to B$ על אמ"מ $|A|\ge|B|$

הוכחה: בתירגול$(\Rightarrow)$ נסמן $A=\{a_1,\ldots,a_m\},B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ כך שאלו איברים שונים ו $n\le m$. נגדיר פונקציה $f:A\to B$ ע"י

$$f(a_i)=\begin{cases}b_i & 1\le i\le n\\ b_1 & n+1\le i\le m\end{cases}$$

והיא על. $(\Leftarrow)$ נניח שקיימת $f:A\to B$ על. אם $B=\emptyset$ אזי מתקיים $|A|\le|B|$ אחרת $B=\{b_1,\ldots,b_n\}$ כאשר אלו איברים שונים ואז לכל $1\le i\le n$ יש מקור יחיד $a_i\in A$ כך ש $f(a_i)=b_i$ כי f פונקציה ועל ולכן $\{a_i:\ 1\le i\le n\}\subseteq A$ בעלת n ולכן $|A|\ge n\,|B|$.
הערה: הכיוון $(\Leftarrow)$ נכון גם עם B ריקה. ■

משפט 6.6 יהיו A,B קבוצות סופיות אזי $|A|=|B|\iff$ לכל $f:A\to B$ מתקיים כי f חח"ע אמ"מ f על

הוכחה: $(\Rightarrow)$ אם $|A|\le|B|$ אזי קיימת $f:A\to B$ חח"ע. לפי נתון f על ולכן $|A|\le|B|$ולכן $|A|=|B|$. אחרת $|B|>|A|$ ואז קיימת $f:A\to B$ על ולפי נתון f חח"ע ולכן $|B|\le|A|$ וקיבלנו סתירה.
$(\Leftarrow)$ צ"ל לכל $f:A\to B$ מתקיים כי f חח"ע אמ"מ f על. תהא $f:A\to B$ צ"ל f חח"ע אמ"מ f על.
בכיוון אחד: נתון f חח"ע אזי $|\{f(a):\ a\in A\}|=|A|=|B|$ כיוון ש $\{f(a):\ a\in A\}\subseteq B$ עם אותו מספר איברים הם שוות ולכן f על.
בכיוון השני: נתון f על. נניח בשלילה כי f אינה חח"ע אזי $|\{f(a):\ a\in A\}|<|A|=|B|$ כיוון ש $\{f(a):\ a\in A\}\subseteq B$ עם פחות איברים הם לא שוות ולכן f לא על. סתירה. ■

הערה 6.7 אם A אינסופית יתכן כי $f:A\to A$ חח"ע ולא על. למשל $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת $f(n)=n+1$.

הגדרה 6.8 יהיו $f:A\to B, g:B\to C$ פונקציות. נגדיר את פונקצית ההרכבה $g\circ f:A\to C$ ע"י $\forall a\in A\ (g\circ f)(a)=g(f(a))$.

למשל $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרות $f(n)=n+1, g(n)=n^2 f(n)=n+1, g(n)=n^2$
אזי ההרכבה $f\circ g(n)=n^2+1, g\circ f(n)=(n+1)^2$ ולכן $f\circ g(2)=5\neq 9=g\circ f(2)$
ולכן הרכבה של שני פונקציות אינה חילופית בהכרח.

למשל $f:A\to B$ אזי $f\circ I_A=f=I_B\circ f$.

תכונה: הרכבת פונקצית היא קיבוצית. כלומר לכל f_1,f_2,f_3 כך שההרכבה מוגדרת מתקיים $f_3\circ(f_2\circ f_1)=(f_3\circ f_2)\circ f_1$.

הגדרה 6.9 פונקציה $f:A\to B$ תקרא הפיכה אם קיימות $g_1,g_2:B\to A$ כך ש $g_1\circ f=I_A, f\circ g_2=I_B$

משפט 6.10 פונקציה $f:A\to B$ הפיכה אמ"מ קיימת $g:B\to A$ כך ש $f\circ g=I, g\circ f=I$. במקרה זה g ההפוכית של f והיא יחידה.

הוכחה: $(\Rightarrow)$ ברור. $(\Leftarrow)$ נתון כי קיימות $g_1,g_2:B\to A$ כך ש $g_1\circ f=I_A, f\circ g_2=I_B$ צ"ל כי $g_1=g_2$. אכן $g_2=I\circ g_2=g_1\circ f\circ g_2=g_1\circ I=g_1$. נשים לב מאותם חישובים נקבל כי אם g,g' הופכיות של f אז $g=g'$ מה שמוכיח את יחידות g. ■

הערה 6.11 את ההופכית של f מסמנים כ f^{-1} וזהו אכן היחס ההפוך של f. עוד מתקיים כי $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

הגדרה 6.12 תהא פונקציה $f:A\to B$ אזי f הפיכה $\iff$ f חח"ע ועל .

הוכחה: $(\Rightarrow)$ נגדיר $g=f^{-1}$ היחס ההפוך ל f. טענה $g:B\to A$ היא פונקציה. הוכחה: לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=b$ כי f על ובנוסף a הזה יחיד כי f חח"ע ולכן לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד כך ש $f^{-1}(b)=a$ וקל לראות כי ההרכבה משני הצדיים תתן את הזהות
$(\Leftarrow)$ חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש $f(a_1)=f(a_2)$ נפעיל את f^{-1} על שני הצדדים ונקבל $a_1=a_2$. על: יהא $b\in B$ וצריך למצוא לו מקור. נגדיר $a=f^{-1}(b)$ והוא יהיה המקור כי $f(a)=b$ ■

דוגמא: תהא A קבוצהץ X קבוצת כל יחסי השקילות על A ו Y קבוצת כל החלוקות של A אזי $f:X\to Y$ המוגדרת $R\to {}^{A}\!/\!_{R}$ היא חח"ע ועל. הוכחה: נגדיר $g:Y\to X$ ע"י $\{A_i\}_{i\in I}\mapsto\bigcup_{i\in I}A_i\times A_i$ מקימת כי ההרכבה משני הצדדים היא הזהות.

משפט 6.13 יהיו $f:A\to B, g:B\to C$ כך ש $g\circ f$ חח"ע אזי f חח"ע.

הוכחה: בתירגול: יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש $f(a_1)=f(a_2)$ צ"ל כי $a_1=a_2$. מכך ש $f(a_1)=f(a_2)$ נקבל כי $g(f(a_1))=g(f(a_2))$ כיוון שנתון שההרכבה חח"ע נסיק כי $a_1=a_2$ ■

משפט 6.14 יהיו $f:A\to B, g:B\to C$ כך ש $g\circ f$ על אזי g על .

הוכחה: בתירגול: יהא $c\in C$ וצריך למצוא $b\in B$ כך ש $g(b)=c$. אכן כיוון שההרכבה על נקבל כי קיים $a\in A$ המקיים $g(f(a))=$ ■

מסקנה 6.15 עבור $f : A \to B$ קבוצות סופיות עם אותו מספר איברים מתקיים כי f הפיכה אמ"מ f חח"ע (אמ"מ f על).

הוכחה: $(\Leftarrow)$ ברור. $(\Rightarrow)$ ראינו שבמקרה זה f חח"ע אמ"מ על ולכן אם f חח"ע היא חח"ע ועל ולכן הפיכה. ■

משפט 6.16 יהיו A, B קבוצות לא ריקות ותהא $f : A \to B$ פונקציה. אזי

1. f חח"ע אמ"מ $\exists g : B \to A : \ g \circ f = I_A$ (קיימת לה הפיכה ימנית)
2. f על אמ"מ $\exists g : B \to A : \ f \circ g = I_B$ (קיימת לה הפיכה שמאלית)

הוכחה: 1. $(\Rightarrow)$נתון שקיים g כך $g \circ f = I_A$ כיוון שהזהות חח"ע נקבל שההרכבה חח"ע ולכן f חח"ע.
$(\Leftarrow)$נתון f חח"ע. אם A ריקה אז $f = \emptyset$ ונגדיר $g = f$ וסיימנו. אחרת קיים $a_0 \in A$ ונגדיר $g : B \to A$ כך

$$g(b) = \begin{cases} a & \text{if } \exists a \in A : f(a) = b \\ a_0 & \text{else} \end{cases}$$

קל לוודא כי $g \circ f = I$.
2. $(\Rightarrow)$נתון שקיים g כך $f \circ g = I_B$ כיוון שהזהות על נקבל שההרכבה על ולכן f על.
$(\Leftarrow)$נתון f על. לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$ לכן נוכל להגדיר $g : B \to A$ ע"י $g(b) = a$ כאשר a מקיים $f(a) = b$. קל לוודא כי $f \circ g = I$. ■

משפט 6.17 הרכבה של פונקציות חח"ע היא חח"ע (הרכבה של על היא על, הרכבה של הפיכות היא הפיכה)

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על מספר הפונקציות n. עבור $n = 2$: יהיו f, g חח"ע ורוצים להוכיח כי $f \circ g$ חח"ע. נניח $f\left(g(x_1)\right) = f\left(g(x_2)\right)$ צ"ל כי $x_1 = x_2$. כיוון ש f חח"ע נקבל כי $g(x_1) = g(x_2)$ ובגלל ש g חח"ע נקבל $x_1 = x_2$ כנדרש. כעת נניח שהטענה נכונה ל n פונקציות ונוכיח עבור $n + 1$ פונקציות. יהיו $f_1, \ldots f_n, f_{n+1}$ פונקציות חח"ע כך שההרכבה $f_1 \circ \cdots \circ f_n \circ f_{n+1}$ מוגדרת ורוצים להוכיח כי היא חח"ע. אכן לפי הנחת האינדוקציה $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ חח"ע ואז

$$(f_1 \circ \cdots \circ f_n) \circ f_{n+1}$$

חח"ע כהרכבה של שתי פונקציות חח"ע.
הרכבה של על היא על: נוכיח רק עבור שתי פונקציות. יהיו $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות על נרצה להוכיח כי $g \circ f : A \to C$ על. יהא $c \in C$ אזי קיים $b \in B$ כך ש $g(b) = c$ וקיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$ כי הפונקציות על. מתקיים כי

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

מה שמוכיח את הטענה. ■

הערה 6.18 במקרה ש f, g הפיכות אזי $f \circ g$ הפיכה ומתקיים $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
הוכחה: ההרכבה משני הצדדים יוצאת הזהות.

6.1 תמונה, תמונה הפוכה וצמצום של פונקציה

הגדרה 6.19 תהא $f : X \to Y$ פונקציה. ויהיו $A \subseteq X, B \subseteq Y$. התמונה של A מוגדרת $f[A] = \{f(a) : a \in A\} \subseteq X$ והתמונה ההפוכה של B מוגדרת להיות $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$

הערה 6.20 שימו לב כי ההגדרה של תמונה הפוכה היא לכל פונקציה, לאו דווקא פונקציה הפיכה. במקרה ו f הפיכה אזי $f^{-1}[B]$ שווה גם לתמונה של B תחת הפונקציה ההופכית.
בנוסף, מתקיים כי

1. $f^{-1}[Y] = X$
2. $f\,[\emptyset] = \emptyset = f^{-1}[\emptyset]$
3. $Im(f) = f[X]$

למשל: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x^2$ אזי עבור $A = \{1, 2, 3\}$ מתקיים $f[A] = \{1, 4, 9\}$ ועבור $B = \{1, 4, 9\}$ מתקיים $f^{-1}[B] = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

טענה 6.21 תהא $f : X \to Y$ פונקציה. ויהיו $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X, B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$. אזי $f[A_1] \subseteq f[A_2], f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$

הוכחה: $f[A_1] \subseteq f[A_2]$: יהא $y \in f[A_1]$ אזי קיים $a \in A_1$ כך ש $y = f(a)$. מהנתון $a \in A_2$ ולכן $y = f(a) \in f[A_2]$.
$f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$: יהא $x \in f^{-1}[B_1]$ אזי $f(x) \in B_1$ מהנתון $f(x) \in B_2$ ולכן $x \in f^{-1}[B_2]$ ■

הגדרה 6.22 תהא $f : X \to Y$ פונקציה. ותהא $A \subseteq X$. הפונקציה המצומצת על A היא $f|_A : A \to Y$ המוגדרת $x \mapsto f(x)$. למשל: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x^2$ אינה חח"ע אבל הצמצום על $\mathbb{R}_{\geq 0}$ הוא כן $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x^2$.

הערה 6.23 שימו לב כי $Im(f|_A) = f[A]$

משפט 6.24 תהא $f : X \to Y$ אזי קיים $A \subseteq X$ כך $f|_A$ חח"ע וגם $Im(f|_A) = Im(f)$

הוכחה: לכל $y \in Im(f)$ נבחר מקור אחד ל y כלומר נבחר $x_y \in f^{-1}[\{y\}]$ והוא מקיים $f(x_y) = y$. נגדיר $A = \{x_y : y \in Im(f)\}$ ואז הצמצום על A יתן פונקציה 1) חח"ע כי בחרנו מוקר יחיד לכל תמונה 2) $Im(f|_A) = Im(f)$ כנדרש. ■

הגדרה 6.25 יהיו A, B קבוצות ויהא $\sim$ יחס שקילות על A. פונקציה $f : A \to B$ תקרא מכבדת את יחס השקילות $\sim$ אם $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \sim a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$

משפט 6.26 היחס $\hat{f} = \{([a]_\sim, f(a)) : a \in A\} \subseteq {}^{A}\!/\!_{\sim} \times B$ הוא פונקציה. כלומר ניתן להגדיר $\hat{f} : {}^{A}\!/\!_{\sim} \to B$ ע"י $\hat{f}([a]_\sim) = f(a)$

הוכחה: לפי הגדרה $\hat{f}$ יחס שלם. נוכיח כי הוא חד ערכי. יהיו $[a_1]_\sim = [a_2]_\sim$ וצריך להוכיח כי $\hat{f}([a_1]_\sim) = \hat{f}([a_2]_\sim)$. אכן כיוון שהמחלקות שוות נקבל כי $a_2 \sim a_1$ ומכיוון ש f מכבדת את $\sim$ נקבל כי $f(a_1) = f(a_2)$ כנדרש להוכיח. ■

למשל: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ עם יחס השקילות $\sim$ המושריה מהחלוקה $\{\{\pm 2\}, \{\pm 1\}, \{0\}\}$. אזי הפונקציה $f : A \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x) = x^2$ מכבדת את יחס השקילות ולכן ניתן להגדיר פונקציה מ $A/\sim \to \mathbb{R}$ ע"י $[a]_\sim \mapsto a^2$.

תרגיל 6.27 נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $\mathbb{Z}$ כך:

$$x \sim y \iff |x| = |y|$$

אלו מהבאות הן פונקציות:

1. $f : \mathbb{Z}/\sim \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f([a]) = a + 1$
2. $f : \mathbb{Z}/\sim \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f([a]) = a^2$

הוכחה: לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $[a] = \{\pm a\}$ ולכן ההגדרה הראשונה לא מגדירה פונקציה שכן $f([3]) = 4$ וגם $f([-3]) = -2$ אבל $[3] = [-3]$ ולכן זה לא יחס חד ערכי. ההגדרה השניה היא כן יחס שכן אם $[a] = [a']$ אז $a \sim a'$ כלומר $|a| = |a'|$ ואז

$$f([a]) = a^2 = |a|^2 = |a'|^2 = a'^2 = f([a'])$$

כלומר f חד ערכית (היא שלמה לפי הגדרה) כנדרש. ■

7 עוצמות

בפרק זה נגדיר בצורה מדויקת את הרעיון של גודל של קבוצה והכללת למושג עוצמה של קבוצה.

הגדרה 7.1 יהיו A, B קבוצות. נאמר כי A שוות עוצמה ל B ונסמן $|A| = |B|$ אם קיימת פונקציה הפיכה (חח"ע ועל) $f : A \to B$

למשל, עבור קבוצה $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ עם 3 איברים קיימת פונקציה חח"ע $f : \{1, 2, 3\} \to A$ ולכן A שוות עוצמה ל $\{1, 2, 3\}$.

הערה 7.2 זכרו כי ראינו שעבור קבוצות סופיות A, B אם קיימת $f : A \to B$ הפיכה אזי $|A| = |B|$ ולכן הגדרה זאת מכלילה את המקרה הסופי.

טענה 7.3 מתקיים כי $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

הוכחה: נגדיר פונקציה $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ כך

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \ f(m) = \begin{cases} 2m + 1 & m \geq 0 \\ 2|m| & m < 0 \end{cases}$$

כלומר

m	$f(m)$
$\vdots$	$\vdots$
-3	6
-2	4
-1	2
0	1
1	3
2	5
$\vdots$	$\vdots$

הפונקציה חח"ע ועל ומכאן שנקבל את המבוקש. ■

טענה 7.4 שיוון עוצמות מתנהג כמו יחס שקילות. כלומר מתקיים כי

1. לכל קבוצה A מתקיים $|A| = |A|$
2. לכל A, B קבוצות מתקיים כי: אם $|A| = |B|$ אז $|B| = |A|$
3. לכל A, B, C קבוצות מתקיים כי: אם $|A| = |B|, |B| = |C|$ אזי $|A| = |C|$

הוכחה:

1. תהא A קבוצה. פונקצית הזהות $I : A \to A$ חח"ע ועל
2. יהיו A, B קבוצות כך ש $|A| = |B|$ אזי קיימת $f : A \to B$ הפיכה ולכן $f^{-1} : B \to A$ הפיכה ולכן $|B| = |A|$
3. יהיו A, B, C קבוצות כך ש $|A| = |B|, |B| = |C|$ אזי קיימות $f : A \to B, g : B \to C$ הפיכות ואז $g \circ f : A \to C$ הפיכה כהרכבה של הפיכות ולכן $|A| = |C|$

■

טענה 7.5 נסמן $2\mathbb{N} - 1$ את קבוצת האי זוגיים הטבעיים וב $2\mathbb{N}$את קבוצת הזוגיים הטבעיים. מתקיים כי

1. $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$
2. $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N} - 1|$
3. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}|$

הוכחה:

1. ע"י הפונקציה $f(n) = 2n$
2. ע"י הפונקציה $f(n) = 2n - 1$

3. ע"י הפונקציה $f(n) = n - 1$

$\blacksquare$

טענה 7.6 מתקיים כי $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

הוכחה: ניתן להוכיח זאת באמצעות הפונקציה

$f(m,n)$	1	2	3	4
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			

$\blacksquare$

דרך נוספת נעיזרת בטענה הבא (בתירגול)

טענה 7.7 אם $|A| = |A'|, |B| = |B'|$ אזי $|A \times B| = |A' \times B'|$ (בתרגיל)

מסקנה 7.8 נגדיר $f : (2\mathbb{N} - 1) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \to \mathbb{N}$ ע"י $f(x,k) = x \cdot 2^k$ אזי f חח"ע ועל כי לכל מספר טבעי יש הצגה יחידה ככפל של מספר אי זוגי כפול 2 בחזקה כלשהיא. ולכן

$$|\mathbb{N}| = |(2\mathbb{N} - 1) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$$

מסקנה 7.9 לכל n טבעי $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n \text{ times}}$ שווה עוצמה ל $\mathbb{N}$

הוכחה: באינדוקציה על n: עבור $n = 1$ אין מה להוכיח. נניח עבור n ונוכיח עבור $n + 1$

$$\left|\mathbb{N}^{n+1}\right| = |\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

כאשר המעבר השני נובע מהנחת האינדוקציה. $\blacksquare$

הגדרה 7.10 העוצמה של הטבעיים מסומנת ב $\aleph_0$. קבוצה A תקרא בת מניה אם $|A| = \aleph_0$ או A סופית.

למשל $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ בת מניה. הערה: כיוון ששיויון עוצמות מתנהג כמו יח"ש אזי אם A שוות עוצמה לקבוצה בת מניה היא בת מניה.

הגדרה 7.11 נאמר שהעוצמה של A קטנה שווה מהעוצמה של B ונסמן $|A| \leq |B|$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע. עוד נסמן $|A| < |B|$ אם $|A| \leq |B|$ וגם $|A| \neq |B|$.
למשל $|\{10\}| < |\{1, 4, 5\}|$

הערה 7.12

1. אם $|A| = |B|$ אזי $|A| \leq |B|$.

2. אם $A \subseteq B$ אזי $|A| \leq |B|$ כי פונקצית ההכלה $f : A \to B$ המוגדרת $f(a) = a$ חח"ע.

משפט 7.13 תהא A קבוצה אזי A בת מניה אמ"מ $|A| \leq \aleph_0$

הוכחה: $(\Leftarrow)$ אם $|A| = \aleph_0$ אזי $|A| \leq \aleph_0$. אם A סופית אזי $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ כאשר אלו איברים שונים ואז הפונקציה $f : A \to \mathbb{N}$ המוגדרת $f(a_i) = i$ היא חח"ע ולכן $|A| \leq \aleph_0$.
$(\Rightarrow)$ נתון שקיימת $f : A \to \mathbb{N}$ חח"ע. כיוון ש A ו $f[A]$ שוות עוצמה מספיק להוכיח כי $S = f[A] \subseteq \mathbb{N}$ בת מניה. אם S סופית סיימנו. אחרת נגדיר $g : \mathbb{N} \to S$ ברקורסיה:
נתחיל ב $g(1) = \min S$ ולכל $n > 1$ נגדיר $S_n = \{g(m) : 1 \leq m < n\}$ ונגדיר $g(n) = \min (S \backslash S_n)$. כיוון ש S_n בעלת $n-1$ איברים ונקבל כי $S \backslash S_n$ לא ריקה ולכן יש לה min. כעת, g חח"ע לפי הגדרה ונסיים את ההוכחה בכך שנראה ש g על (ואז $|\mathbb{N}| = |S|$): יהא $s \in S$ אזי מתקיים $s \in \{g(1), \ldots, g(s)\}$ כי $\{g(1), \ldots, g(s)\}$ הם s האיברים הראשונים ב S. ■

הערה 7.14 באותו אופן מוכיחים כי אם A לא סופית אזי $\aleph_0 \leq |A|$. מגדירים $g : \mathbb{N} \to A$ באותו אופן של ההוכחה ואז g חח"ע.

מסקנה 7.15 תת קבוצה של בת מניה היא בת מניה. כלומר: תהא A בת מניה ו $B \subseteq A$ אזי B בת מניה

הוכחה: מתקיים כי קיימת $f : A \to \mathbb{N}$ חח"ע אזי $f|_B : B \to \mathbb{N}$ חח"ע ולכן $|B| \leq \aleph_0$ ■

משפט 7.16 (קנטור ברנשטיין) יהיו A, B קבוצות אזי אם $|A| \leq |B|, |B| \leq |A|$ אזי $|A| = |B|$

מסקנה 7.17 קטן שווה עוצמה מתנהג כמו יחס סדר. כלומר

1. לכל קבוצה A מתקיים $|A| \leq |A|$
2. לכל A, B קבוצות אם אם $|A| \leq |B|, |B| \leq |A|$ אזי $|A| = |B|$
3. לכל A, B, C קבוצות אם אם $|A| \leq |B|, |B| \leq |C|$ אזי $|A| \leq |C|$

הוכחה: סעיף 1 נובע מפונקצית הזהות, סעיף 2 זהו משפט קנטור ברנשטיין. סעיף 3: נניח קיימות $f : A \to B, g : B \to C$ חח"ע אזי $g \circ f : A \to C$ חח"ע כהרכבה של חח"ע. ■

טענה 7.18 יהיו A, B קבוצות לא ריקות. אזי קיימת $f : A \to B$ על $\iff$ $|B| \leq |A|$

הוכחה: $(\Leftarrow)$ממשפט 6.24 נקבל כי קיימת $A' \subseteq A$ כך ש $f|_{A'} : A' \to B$ חח"ע וגם $Im(f|_{A'}) = Im(f)$ כיוון ש $Im(f) = B$ נקבל כי $|A'| = |B|$ ולכן $|B| = |A'| \leq |A|$כנדרש.
$(\Rightarrow)$ נתון שקיימת $f : B \to A$ חח"ע. אזי לפי משפט 6.16 קיימת $g : A \to B$ המקיימת $g \circ f = I_B$ ולכן היא על (אם הרכבה על השמאלית על) . ■

מסקנה 7.19 מתקיים $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

הוכחה: הפונקציה $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ המוגדרת ע"י $f(z,n)=\frac{z}{n}$ על ולכן

$$\aleph_0=|\mathbb{N}|\leq|\mathbb{Q}|\leq|\mathbb{Z}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$$

ולפי קנטור ברנשטיין יש שיוויון. ■

משפט 7.20 איחוד בן מניה של בנות מניה הוא בן מניה. כלומר יהא $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות כך ש I בן מניה וגם A_i בת מניה לכל $i\in I$ אזי $\bigcup_{i\in I}A_i$ בת מניה

הוכחה: בה"כ: לכל $i\in I$ מתקיים $A_i\neq\emptyset$ (אם A_i ריקה, נוריד אותה מהאיחוד. אם כולם ריקות אז האיחוד הוא קבוצה ריקה). כעת, נתון שקיימות פונקציות על $f_i:\mathbb{N}\to A_i$ לכל $i\in I$. נגדיר $f:I\times\mathbb{N}\to\bigcup_{i\in I}A_i$ ע"י $f(i,n)=f_i(n)$. טענה: f על. הוכחה, יהא $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אזי קיים $i\in I$ כך ש $y\in A_i$ כיוון ש f_i על קיים n טבעי כך ש $f_i(n)=y$ ולכן (i,n) מקור ל y. כעת

$$\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\leq|I\times\mathbb{N}|\leq|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$$

כנדרש. ■

7.1 עוצמת הרצף

משפט 7.21 כל הקטעים מהצורה $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)\subseteq\mathbb{R}$ שווי עוצמה עבור $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $a<b$.

הוכחה: בתרגול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $a<b$ אזי $f:(0,1)\to(a,b)$ המוגדרת $f(x)=a+(b-a)x$ חח"ע ועל. לכן כל הקטעים מהצורה (a,b) שווי עוצמה. כעת עבור $a<b$ ממשיים מתקיים כי

$$(a,b)\subseteq[a,b]\subseteq(a-1,b+1)$$
$$(a,b)\subseteq(a,b]\subseteq(a-1,b+1)$$
$$(a,b)\subseteq[a,b)\subseteq(a-1,b+1)$$

ולכן לפי קנטור ברנשטיין כל הקטעים האלה שווי עוצמה. ■

טענה 7.22 $|\mathbb{R}|=\left|\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right|$ ולכן שווה עוצמה גם לקרנות $(a,\infty),(-\infty,b)$

הוכחה: הפונקציה $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ הפיכה. ■

משפט 7.23 $\aleph_0<|\mathbb{R}|$

הוכחה: $\aleph_0\leq\mathbb{R}$ כיוון ש $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$. נוכיח כי הם אינם שוות בעזרת האלכסון של קנטור: נניח בשלילה כי קיימת $f:\mathbb{N}\to[0,1]$ הפיכה ובפרט על. כל $x\in[0,1]$ ניתן להצגה בייצוג

עשרוני. כלומר $x = 0.a_0a_1\ldots$ כאשר $a_i \in \{0.\ldots,9\}$. לכל n טבעי נסמן את הספרות של $f(n)$ כ $0.a_1^na_2^n\ldots$ כלומר

n	$f(n)$
1	$0.a_1^1a_2^1a_3^1\ldots$
2	$0.a_1^2a_2^2a_3^2\ldots$
3	$0.a_1^3a_2^3a_3^3\ldots$
$\vdots$	

ונגדיר מספר $[0,1] \ni x = \cdots 0.b_1b_2$ כך

$$b_n = \begin{cases} 1 & a_n^n = 0 \\ 0 & a_n^n \neq 0 \end{cases}$$

כלומר המספר x שונה מהמספר $f(n)$ בספרה ה nית אחרי הנקודה. במילים אחרות $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq x$ כלומר ל x אין מקור. סתירה לכך ש f על. ∎

הערה 7.24 את עוצמת הממשים מסמנים כ $\aleph$ או $\mathfrak{c}$. שאלה טבעית: האם קיימת עוצמה $\aleph_0 < \kappa < \aleph$? ב 1963 השלימו את ההוכחה כי לא ניתן לענות על שאלה זאת.

טענה 7.25 תהא $A = \{a \in \mathbb{R} | \exists 0 \neq p(x) \in \mathbb{Q}(x) : p(a) = 0\}$ אזי $|A| = \aleph_0$

הוכחה: בכיוון אחד $\mathbb{Q} \subseteq A$ כי לכל a רציונאלי הוא מאפס את הפולינום $x - a$. בכיוון השני:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{a \in \mathbb{R} | \exists 0 \neq p(x) \in \mathbb{Q}_n(x) : p(a) = 0\}$$

איחוד בן מניה ונרצה להוכיח שכל אחת מהקבוצות היא בת מניה. אכן לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ הפונקציה $\mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}_n(x)$ המוגדרת $(a_0, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$ היא חח"ע ועל ולכן $|\mathbb{Q}_n(x)| = \left|\mathbb{Q}^{n+1}\right| = \aleph_0$ ולכן

$$\{a \in \mathbb{R} | \exists 0 \neq p(x) \in \mathbb{Q}_n(x) : p(a) = 0\} = \bigcup_{0 \neq p(x) \in \mathbb{Q}_n(x)} \{a \in \mathbb{R} | p(a) = 0\}$$

הוא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה כי $|\{a \in \mathbb{R} | p(a) = 0\}| \leq n$ כנדרש. ∎

7.2 אריתמטיקה של עוצמות

הגדרה 7.26 יהיו A, B קבוצות. נגדיר $A^B = \{f : B \to A : f \text{ is function}\}$.

למשל $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ זוהי הקבוצה של כל הפונקציות מהטבעיים ל $\{0,1\}$. כלומר קבוצת כל הסדרות הבינאריות.

הגדרה 7.27 יהיו κ_1, κ_2 עוצמות ויהיו A_1, A_2 קבוצות כך ש $|A_i| = \kappa_i$ אזי

1. $\kappa_1 + \kappa_2 = |A_1 \times \{1\} \cup A_2 \times \{2\}|$. במידה ו A_1, A_2 זרות $\kappa_1 + \kappa_2 = |A_1 \cup A_2|$

2. $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = |A_1 \times A_2|$
3. $\kappa_1^{\kappa_2} = \left|A_1^{A_2}\right|$

הערה 7.28

1. במקרה הסופי, אריתמטיקת העוצמות עובדת כמו שרגילים. למשל $2+3 = |\{1,2\} \cup \{4,5,6\}| = 5$. למשל $|\{1,2\} \times \{3,4,5\}| = 6$
2. ההגדרה אינה תלוי בבחירת הקבוצות A_1, A_2
3. "חוקי חזקות" המוכרים עובדים גם במקרה הכללי:
   (א) חילופיות $\kappa_1\kappa_2 = \kappa_2\kappa_1$ וגם $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_2 + \kappa_1$
   (ב) קיבוציות $\kappa_1(\kappa_2\kappa_3) = (\kappa_1\kappa_2)\kappa_3$ וגם $\kappa_1 + (\kappa_2 + \kappa_3) = (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_3$
   (ג) פילוג $\kappa_1(\kappa_2 + \kappa_3) = \kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3$
   (ד) $(\kappa_1\kappa_2)^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_3}\kappa_2^{\kappa_3}$
   (ה) $\kappa_1^{\kappa_2+\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_2}\kappa_1^{\kappa_3}$
   (ו) $(\kappa_1^{\kappa_2})^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_2\kappa_3}$

טענה 7.29 $(\kappa_1\kappa_2)^{\kappa_3} = \kappa_1^{\kappa_3}\kappa_2^{\kappa_3}$

הוכחה: יהיו A_i קבוצות מעוצמה κ_i ונגדיר פונקציה $f : (A_1 \times A_2)^{A_3} \to A_1^{A_2} \times A_1^{A_3}$ כך $g \mapsto (P_1 \circ g, P_2 \circ g)$ כאשר $P_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ היא ההטלה המוגדרת $(a_1, a_2) \mapsto a_i$. ההפוכית של f היא הפונקציה $A_1^{A_2} \times A_1^{A_3} \to (A_1 \times A_2)^{A_3}$ המוגדרת $(h_1, h_2) \mapsto h_1 \times h_2$ כאשר $h_1 \times h_2 : A_3 \to A_1 \times A_2$ מוגדרת להיות $h_1 \times h_2(x) = (h_1(x), h_2(x))$. ■

טענה 7.30 תהא A קבוצה אזי $|P(A)| = \left|\{0,1\}^A\right|$

הוכחה: בתירגול. מסקנה $|P(A)| = 2^{|A|}$ ■

משפט 7.31 תהא A קבוצה אזי $|A| < |P(A)| = 2^{|A|}$

הערה 7.32 עבור A סופית עם n איברים ראינו כי $n = |A| < |P(A)| = 2^n$.

הוכחה: אם A ריקה הטענה מתקיימת. נניח כי A אינה ריקה ונגדיר $f : A \to P(A)$ ע"י $f(a) = \{a\}$. זוהי פונקציה חח"ע ולכן $|A| \leq |P(A)|$. נוכיח כי $|A| \neq |P(A)|$. נניח בשלילה כי העוצמות שוות ולכן קיימת $f : A \to P(A)$ הפיכה ובפרט על. נגדיר $X = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subseteq A$ כיוון ש f על נקבל כי קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = X$. כעת אם $x \in f(x) = X$ אז לפי התנאי של X נקבל $x \notin X$. אם $x \notin f(x) = X$ אז לפי התנאי של X נקבל $x \in X$. סתירה. ■

טענה 7.33 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})|$

הוכחה: נגדיר $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]$ ע"י $F(f)=0.f(1)f(2)\ldots$ היא חח"ע. בנוסף $G:\{0,\ldots 9\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]$ המוגדרת $G(f)=0.f(1)f(2)\ldots$ היא על. לכן $2^{\aleph_0}\leq|\mathbb{R}|\leq$ $10^{\aleph_0}\leq\left(2^4\right)^{\aleph_0}=2^{4\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ ■

טענה 7.34 נגדיר A להיות קבוצת כל היחסים על $\mathbb{R}$. מצאו את עוצמת A

הוכחה: $A=P(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ולכן $|A|=2^{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|}=2^{\left(2^{\aleph_0}\right)^2}=2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}=2^{|\mathbb{R}|}$ ■

משפט 7.35 (תחת אקסיומת הבחירה) כל שני עוצמות ניתנות להשוואה. כלומר, יהיו κ_1,κ_2 שני עוצמות אז $\kappa_1\leq\kappa_2$ או $\kappa_2\leq\kappa_1$

משפט 7.36 (תחת אקסיומת הבחירה) יהיו κ_1,κ_2 שני עוצמות כך שאחת מהם אינסופית. אזי

1. $\kappa_1+\kappa_2=\max\{\kappa_1,\kappa_2\}$
2. אם שניהם שונות מאפס מתקיים גם $\kappa_1\kappa_2=\max\{\kappa_1,\kappa_2\}$

מסקנה 7.37 יהיו $2\leq\kappa_1\leq\kappa_2$ שני עוצמות כך שאחת מהם אינסופית. אזי $2^{\kappa_2}=\kappa_1^{\kappa_2}$

הוכחה: מתקיים $2^{\kappa_2}\leq\kappa_1^{\kappa_2}\leq\left(2^{\kappa_1}\right)^{\kappa_2}=2^{\kappa_1\kappa_2}=2^{\kappa_2}$ ■

למשל $2^{\aleph}=\aleph_0^{\aleph}$, למשל $\aleph^{\aleph_0}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$

טענה 7.38 $\aleph=|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|$

הוכחה: $\mathbb{R}=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}$ איחוד זר ולכן

$$\aleph=|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|+\aleph_0=\max\{|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|,\aleph_0\}=|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|$$

כאשר השיוון האחרון נובע מכך שאם $\max\{|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}|,\aleph_0\}=\aleph_0$ נקבל סתירה. ■

8 קומבינטוריקה

בפרק זה נעבוד עם קבוצות סופיות בלבד. ראינו כבר בפרק הקודם כי

1. עיקרון הסכום: אם A,B קבוצות זרות אזי $|A\cup B|=|A|+|B|$. באופן כללי: יהיו $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות זרות בזוגות אזי $\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right|=\sum_{i=1}^n|A_i|$
2. עיקרון המכפלה: יהיו A,B קבצות אזי $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. באופן כללי: יהיו $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות אזי $|A_1\times\cdots\times A_n|=\prod_{i=1}^n|A_i|$

למשל: כמה סיסמאות באורך 10 ניתן ליצור בעזרת האותיות $L=\{a,b,c\}$ והמספרים $N=\{1,2\}$ שמתחילות באות ונגמרות במספר? פתרון: נסמן ב X את קבוצת הסיסמאות הנ"ל אזי

$$X=L\times(L\cup N)^8\times N$$

ולכן לפי כלל הסכום ומהכפלה

$$|X| = |L| \cdot (|L| + |N|)^8 \cdot |N| = 3 \cdot 5^8 \cdot 2 = 2343750$$

טענה 8.1 עיקרון החיסור: אם $A \subseteq B$ אזי $|B - A| = |B| - |A|$

הוכחה: $B = A \cup (B - A)$ קבוצות זרות ולכן לפי עיקרון הסכום $|B| = |A| + |B - A|$ נעביר אגף ונקבל את המבוקש. ■

טענה 8.2 יהיו A, B קבוצות אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

הוכחה: מתקיים $A \cup B = A \backslash (A \cap B) \cup B$ וגם $A \backslash (A \cap B), B$ זרות ולכן

$$|A \cup B| = |A \backslash (A \cap B) \cup B| = |A \backslash (A \cap B)| + |B| = |A| - |A \cap B| + |B|$$

כאשר המעבר האחרון הוא מעיקרון החיסור. ■

הגדרה 8.3 נגדיר את המספר $n!$ לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ברקורסיה - $0! = 1$ ובנוסף לכל n טבעי $n! = n \cdot (n-1)!$. יוצא שעבור n טבעי $n! = 1 \cdots n$.

טענה 8.4 תמורה של $\{1, \ldots, n\}$ היא פונקציה חח"ע ועל מ $\{1, \ldots, n\}$ לעצמה. מספר התמורות מ מ $\{1, \ldots, n\}$ ל $\{1, \ldots, n\}$ הוא $n!$.

הוכחה: ל 1 יש n אפשרויות להישלח. ל 2 נשארו $n-1$ אפשריות וכו' ולכן סך התמורות הוא $n!$. ■

טענה 8.5 כמה יחסי סדר קווי יש על A בת n איברים?

הוכחה: זה לסדר n איברים בטור (דיאגרמת הסה). למקום העליון יש n אפשריות לבא אחריו $n-1$ עד למקום התחתון שנשאר עם אפשרות בודדת ולכן התשובה היא $n!$ ■

8.1 בחירת k עצמים מתוך n

ארבעת הנוסחאות הבסיסיות לבחירת k עצמים מתוך n הם

	with repetition	without
order matters	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
order not matters	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

בחירה עם חזרות עם חשיבות לסדר

דוגמא: מה עוצמת הקבוצה $X = \{(a_1, \ldots, a_k) : a_i \in \{1, \ldots, n\}\}$? פתרון: זה בחירה מתוך הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ עם חזרות ועם חשיבות לסדר. מספר האפשרויות הוא $\#a_1 \cdot \cdots \#a_k = n^k$

בחירה בלי חזרות ועם חשיבות לסדר

דוגמא: כמה אפשרויות יש לסדר k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים בשורה? פתרון: זה בחירה מתוך קבוצה של n אנשים בלי חזרות ועם חשיבות לסדר (הסדר של הבחירה קובע את הסדר בשורה). למקום האפס יש n אפשרויות למקום הראשון יש $n-1$ אפשרויות... למקום ה $k-1$־י יש $n-(k-1)=n-k+1$ אפשריות ולכן מספר האפשרויות הכולל הוא $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$

בחירה בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר

הגדרה 8.6 יהא n טבעי או אפס ויהא $0\le k\le n$. המספר $\binom{n}{k}$ הוא מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר.

דוגמא־ כמה תתי קבוצות מגודל k יש לקבוצה בת n איברים? פתרון: זוהי בחירה של איברים מתוך n איברי הקבוצה בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר ולכן התשובה היא $\binom{n}{k}$. כמה זה יוצא? מספר האפשרויות לבחור k מתוך n בלי חזרות ועם חשיבות לסדר הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$, כעת עם נרצה שהסדר לא ישפיע אנחנו צריכים ל"צמצם כפילויות" כלומר k בחירות שבחרנו יספרו פעם אחת בלי חשיבות לסדר בחירתם. כמה כפילויות ספרנו לכל בחירת k? $k!$ שזה מספר התמורות שלהם ולכן $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

הערה 8.7

1. מתקיים לפי חישוב ישיר כי $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ שזה שקול לעובדה שלבחור k עצמים מתוך n שקול לבחור $n-k$ עצמים מתוך n. אפשר לספור את העצמים שלוקחים או את אלו שלא לוקחים.
2. לפי הגדרת $\binom{n}{k}$ אם $n<0$ או $k<0$ או $n<k$ אזי $\binom{n}{k}=0$

טענה 8.8 מתקיים כי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

הוכחה: מספר תתי הקבוצות מגודל k של קבוצה A בת n איברים הוא $\binom{n}{k}$ ולכן $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ הוא מספר הכולל של תתי קבוצות של A. מצד שני המספר הכולל של תתי קבוצות של A הוא $|P(A)|=2^n$ ■

טענה 8.9 יהא x,y מספרים ויהא n טבעי אזי $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$

הוכחה: לפי הגדרה $(x+y)^n=(x+y)\cdots(x+y)$ הוא כפל של n סוגרים $(x+y)$. כשנפתח סוגריים ע"י פילוג נקבל 2^n מחוברים שכל אחד מהם הוא מכפלה של n גורמים כאשר כל גורם הוא או x או y ולכן כל מחובר הוא מהצורה x^ky^{n-k} ולכן $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}c_kx^ky^{n-k}$ עבור איזה שהוא קבוע c_k. מי הוא הקבוע הזה? המקדם של x^ky^{n-k} הוא בחירת k סוגריים מתוך nהסוגריים שבהם נבחר x (וכל השאר נבחר y) כמה אפשרויות כאלה יש? $\binom{n}{k}$. ■

מסקנה 8.10 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$. הוכחה: נבחר $x=-1,y=1$ בטענה הקודמת.

בחירה עם חזרות ובלי חשיבות לסדר

כאן אפשרי ש $n < k$. דוגמא: נניח יש n מועמדים לנשיאות $a_1, \ldots, a_n$ ויש k בוחרים. כמה תוצאות בחירות יש? (תוצאות בחירות = כמה קולות קיבל כל מועמד). פתרון: זה לבחור מתוך הקבוצה $\{a_1, \ldots, a_n\}$ kפעמים עם חזרות ובלי חשיבות לסדר.
נסמן x_i להיות מספר הקולות שקיבל מומעד a_i אזי אנחנו צריכים לפתור את המשוואה $x_1 + \cdots + x_n = k$ כאשר $0 \leq x_i$ שלם. נשים x_1 כוכביות שיסמנו את מספר בוחרי a_1 ביחד, נשים קו הפרדה | נשים את x_2 כוכביות לבוחרי a_2, נשים קו הפרדה |, וכו' בסה"כ מה שיצא לנו זה לשאול כמה אפשריות יש לסידור k כוכביות + $n-1$ קוים | ברצף? פתרון: צריך לבחור מתוך $n+k-1$ המקומות האפשריים את k המקומות עבור $*$ (או לחילופין לבחור $n-1$ מקומות עבור |) ולכן התשובה היא $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

טענה 8.11 זהות פסקל: לכל $0 \leq n, k$ מתקיים $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

הוכחה: הוכחה קומבינטורית: כמה אפשריות יש לבחור קבוצה בת k איברים מתוך $\{1, \ldots, n\}$? ראינו כי $\binom{n}{k}$. אפשר לחלק לשני מקרים תתי הקבוצות ש n שייך אליהם וכאלו שלו. מספר תתי הקבוצות ש n לא שייך אליהם = לבחור קבוצה בת k מתוך $\{1, \ldots, n-1\}$= $\binom{n-1}{k}$. מספר תתי הקבוצות ש n שייך אליהם = לבחור קבוצה בת $k-1$ איברים מתוך $\{1. \ldots, n-1\}$ (ולצרף אליה את n) = $\binom{n-1}{k-1}$. כיוון שאלו אפשריות זרות שגודל האיחוד שלהם שווה $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ כנדרש. ∎

במשולש פסקל

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \vdots & & \end{array}$$

כל מספר מחושב כסכום של השניים מעליו.

8.2 הכלה הדחה

ראינו כי עבור A, B קבוצות מתקיים $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. לכן עבור A, B, C מתקיים

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - [|(A \cap C)| + |(B \cap C)| - |(A \cap C \cap B \cap C)|] \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

ההכלה לאיחוד של n קבוצות הוא:

משפט 8.12 יהיו $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

הוכחה: יהא x איבר באיחוד ב $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ הוא נספר פעם אחת. נראה שגם ב $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$.

אכן נניח כי x נמצא ב t קבוצות, בה"כ $A_1,\ldots,A_t$ אזי התרומה שלו היא בסכום

$$\sum_{k=1}^{t} (-1)^{k-1} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,t\}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

והוא יתרום

$$\sum_{k=1}^{t} (-1)^{k-1} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,t\}} 1 = \sum_{k=1}^{t} (-1)^{k-1}\binom{t}{k} = -\sum_{k=1}^{t} (-1)^{k}\binom{t}{k} = -\left[\sum_{k=0}^{t} (-1)^{k}\binom{t}{k} - 1\right] = 1$$

בגלל ש $\sum_{k=0}^{t} (-1)^{k}\binom{t}{k} = 0$ ■

הוכחה נוספת: **הוכחה:** נשים לב כי הטענה שקולה לכך ש $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$. נוכיח אותה באינדוקציה על n. עבור $n=1$ נקבל שיוון. נניח כי הטענה עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right|$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right|$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left[\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}\right|\right]$$

$$= \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq [n+1] \\ n+1 \notin I}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left[\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i\right|\right]$$

$$= \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq [n+1] \\ n+1 \notin I}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + |A_{n+1}| + \left[\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i\right|\right]$$

$$= \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq [n+1] \\ n+1 \notin I}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left|\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i\right|$$

$$= \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq [n+1] \\ n+1 \notin I}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{\substack{\emptyset \neq J \subseteq [n+1] \\ n+1 \in J}} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{i\in J} A_i\right|$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n+1]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

כנדרש. ■

טענה 8.13 כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ כאשר $3 \le x_1, 3 \le x_2, 0 \le x_3$ שלמים?

הוכחה: נחליף משתנים $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3$ ואז השאלה היא כמה פתרונות יש ל $y_1 + y_2 + y_3 = 2$ כאשר $0 \le y_i$ שלם וראינו שהפתרון הוא $\binom{2+3-1}{2}$. ■

טענה 8.14 כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ כאשר כל $0 \le x_i \le 4$ שלמים?

הוכחה: מספר הפתרונות למשוואה כך ש $0 \leq x_i$ הוא $\binom{10+3-1}{2}$ נחסיר את הפתרונות בהם קיים $5 \leq x_i$. נגדיר A_i קבוצת הפתרונות בהם $5 \leq x_i$. נרצה לחשב $\left|\cup_{i=1}^{3} A_i\right|$. לפי הכלה הדחה נקבל

$$\begin{aligned}\left|\cup_{i=1}^{3} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{|I|=2} |\cap_{i\in I} A_i| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 3 \cdot \binom{5+3-1}{2} - \binom{3}{2} \cdot \binom{0+3-1}{2} + \binom{-5+3-1}{2} \\ &= 3 \cdot 21 - 3 \cdot 1 + 0 = 60\end{aligned}$$

ולכן הפתרון לשאלה הוא $\binom{10+3-1}{2} - 60 = 66 - 60 = 6$ ■

8.3 שובך היונים

ראינו כי אם $f : A \to B$ חח"ע אזי $|A| \leq |B|$ ולכן אם $|A| > |B|$ כל $f : A \to B$ לא חח"ע. אם A היא קבוצה של יונים ו B היא קבוצת שובכים אזי אם יש יותר יונים משובכים ואנחנו מתאימים לכל יונה שובך אזי בהכרח יהיו שני יונים בשובך אחד. זהו עיקרון שובך היונים. למשל בכל שלושה מספרים טבעיים יהיו שניים עם אותה זוגיות.

טענה 8.15 יהא n טבעי ותהא $(x_1, \ldots, x_{n^2+1})$ סדרה של n^2+1 מספרים ממשים שונים. הוכיחו כי קיימת תת סדרה של $n+1$ מספרים שמהווה סדרה מונטונונית.

הוכחה: נגדיר $f : \{x_i\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך $f(x_i) = (s_i, t_i)$ כאשר s_i הוא אורך הסדרה העולה הארוכה ביותר שנגמרת ב x_i ו t_i הוא אורך הסדרה היורדת הארוכה ביותר שנגמרת ב x_i. טענה: f חח"ע הוכחה: יהיו $x_i \neq x_j$ בה"כ $i < j$. אם $x_i < x_j$ אזי $t_i < t_j$ ואם $x_i > x_j$ אזי $s_i < s_j$ משל. כעת נניח בשלילה כי הסדרה המונוטונית הארוכה ביותר היא באורך n אזי $Im(f) \subseteq \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ אבל תחום f בן n^2+1 איברים והתמונה בת n^2 איברים לכל היותר ולכן f אינה חח"ע. סתירה. משל ■

9 גרפים

הגדרה 9.1 הגדרה: גרף G הוא זוג סדור (V, E) כאשר

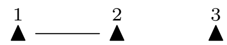
1. V נקראת קבוצת הקודקודים.
2. $E \subseteq V \times V$ נקראת קבוצת הקשתות. אם $(v, u) \in E$ נאמר שיש קשת בין v ל u.

הסדר של הוא מספר הקודקודים $|V|$. אם הסדר סופי, הגרף יקרא סופי.

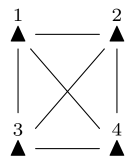
הגדרה 9.2 גרף $G = (V, E)$ יקרא

1. גרף פשוט אם אין בו לולאות, כלומר $\forall v \in V : (v, v) \notin V$
2. גרף לא מכוון אם E סימטרית, כלומר $\forall (v, u) \in E \Rightarrow (u, v) \in E$. במקרה זה קבוצת הקשתות תוחלף ב $\{\{u, v\} : (v, u) \in E\}$. קבוצת זאת תסומן ב E והסימון $(v, u) \in E$ יציין $\{u, v\}$. בגרף פשוט לא מכוון סופי, כמות הקשתות הוא חצי מכמות הזוגות הסדורים.

למשל הגרף $V=\{1,2,3\}\,, E=\{\{1,2\}\}$ הוא גרף לא מכוון סופי המתואר גרפית ע"י

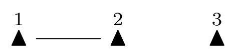


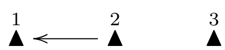
למשל הגרף המלא על $\{1,\ldots,n\}$ הוא גרף פשוט לא מכוון בו כל הקשתות קיימות. למשל הגרף המלא על $\{1,\ldots,4\}$ הוא



הערה 9.3 בגרף מלא על n קודקודים יש $\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ קשתות כי זהו מספר האפשריות לבחור 2 קודקודים שונים מתוך ה n האפשריים.

הגדרה 9.4 יהא $G=(V,E)$ גרף. קודקוד u יקרא שכן של v אם $(v,u)\in E$. קבוצת השכנים של v מסומנת $\Gamma(v)=\{u\in V:\ (v,u)\in E\}$.

למשל בגרף  מתקיים כי $\Gamma(1)=\{2\}$

ובגרף המכוון  מתקיים כי $\Gamma(1)=\emptyset$.

הגדרה 9.5 יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ויהא $v\in V$. הדרגה של v היא מספר השכנים של v כלומר $\deg(v)=|\Gamma(v)|$.

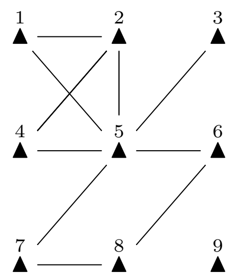
משפט 9.6 משפט לחיצת הידיים: יהא $G=(V,E)$ פשוט, לא מכוון סופי אזי $\sum_{v\in V}\deg(v)=2\,|E|$

הוכחה: $\deg(v)$ הוא מספר הקשתות $e\in E$ כך ש $v\in e$ ולכן $\sum_{v\in V}\deg(v)$ הוא מספר הכולל של הקשתות כפול 2 כי כל קשת $\{v,u\}\in E$ נספרת פעמיים (פעם ב $\deg(v)$ ופעם ב $\deg(u)$). ■

הגדרה 9.7 יהא $G=(V,E)$. סדרת קודקודים $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ תקרא מסלול באורך n אם $(v_i,v_{i+1})\in E$ לכל $0\leq i\leq n-1$ וכל הקשתות שונות זו מזו. בנוסף מסלול $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ יקרא

1. מסלול פשוט אם $\{v_i\}_{i=0}^{n}$ שונים פרט אולי $v_0=v_n$
2. מעגל הוא מסלול בו $v_0=v_n$ ובנוסף $3\leq n$
3. מעגל פשוט הוא מעגל שגם מסלול פשוט.

למשל בגרף

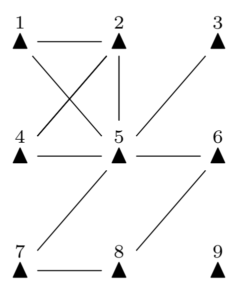


המסלול $(2,4,5,7,8,6,5,3)$ הוא מסלול באורך 7, המסלול $(2,4,5)$ הוא פשוט והמסלול $(5,6,8,7,5)$ הוא מעגל שגם מעגל פשוט.

הערה 9.8 יהא $G=(V.E)$ גרף אזי יש בו מעגל אמ"מ יש בו מעגל פשוט. הוכחה: $(\Rightarrow)$ברור. $(\Leftarrow)$נתון $C=(v_0,\dots,v_n)$ מעגל נבחר פעם ראשונה בו קודקוד מופיע פעמיים (קיים קודקוד שמופיע פעמיים $v_0=v_n$) נניח במקומות $i<j$ ואז $(v_i,\dots,v_j)$ מעגל פשוט.

הגדרה 9.9 יהא $G=(V,E)$ ויהיו $v,u\in V$. המרחב בין vל u, מסומן $d(v,u)$ הוא אורך המסלול הקצר המתחיל ב v ונגמר ב u. אם אין מסלול בין v ל u נסמן $d(v,u)=\infty$.

למשל בגרף

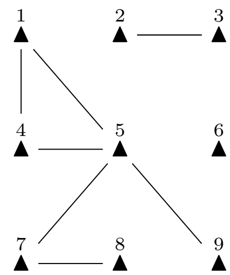


המרחב$d(3,1)=2, d(9,1)=\infty$

הערה 9.10 בגרף לא מכוון $d(v,u)=d(u,v)$. בנוסף, $d(v,v)=0$

הגדרה 9.11 יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. נגדיר יחס $\to$ על V כך: $v\to u \iff d(v,u)<\infty$. יחס זה הוא יחס שקילות ומחלקות השקילות נקראות רכיבי קשירות.

למשל בגרף



רכיבי הקשירות הם $\{6\}, \{2,3\}, \{1,4,5,7,8,9\}$.

הגדרה 9.12 גרף $G=(V,E)$ נקרא קשיר אם בין כל שני קודקודים קיים מסלול. כלומר $\forall v,u\in V: d(v,u)<\infty$. בגרף מכוון מתקיים כי G קשיר $\Longleftrightarrow$ קיים רכיב קשירות יחיד $\Longleftrightarrow \forall v\in V: [v]_{\to} = G$

משפט 9.13 יהא $G=(V,E)$ קשיר, פשוט, לא מכוון שקיים בו מעגל $C=(v_0,\dots,v_n=v_0)$ אזי הגרף $G'=(V,E\setminus\{e\})$ קשיר גם כן עבור $e=\{v_{n-1},v_n\}$

הוכחה: יהיו $v,u\in V$ אזי יש מסלול מ v ל u עם צלעות E כי G קשיר. כעת אם הצלע e היא חלק מהמסלול נחליף אותה ב $(v_0,\dots,v_{n-1})$ ונקבל מסלות מ v ל u שיש בו רק צלעות מ G' ■

משפט 9.14 בגרף $G=(V,E)$ פשוט, לא מכוון מסדר n עם $0\le k\le n-1$ קשתות אזי יש $n-k$ רכיבי קשירות לפחות.

הוכחה: באינדוקציה על k. עבור $k=0$ זה גרף ללא קשתות ולכן לכל קודקוד $[v]_{\to}=\{v\}$. כעת נניח נכונות עבור k ונוכיח עבור $k+1$. נניח כי ב $G=(V,E)$ יש $k+1$ קשתות. תהא $e\in E$. בגרף $G'=(V,E\setminus\{e\})$ ישk קשתות ולכן יש לפחות $n-k$ רכיבי קשירות לפי הנחת האינדוקציה. נסמן $e=(v,u)$ אם u,v באותו רכיב קשירות אזי מספר רכיבי הקשירות ב G וG' שווה ולכן ב G יש לפחות $n-k>n-(k+1)$ רכיבי קשירות. אם v,u ברכיבי קשירות שונים אזי ב G יהיה רכיב קשירות אחד פחות ולכן יהיה לו לפחות $n-k-1=n-(k+1)$ רכיבי קשירות. ■

מסקנה 9.15 בגרף $G=(V,E)$ קשיר לא מכוון מסדר n יש לפחות $n-1$ קשתות.

משפט 9.16 בגרף $G=(V,E)$ לא מכוון מסדר $3\le n$ עם $n\le k$ קשתות יש מעגל.

הוכחה: באינדוקציה על n. עבור $n=3$ יש לנו מעגל וסימנו. נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$. יהא $G=(V,E)$ לא מכוון מסדר $n+1$ עם $n+1\le k$ קשתות. אם קיים $v\in V$ כך ש $\deg(v)\le 1$ אזי נוריד אותו ואת הקשת שאולי מחוברת אליו ונקבל גרף G' הוא מסדר n ויש לו $n\le k$ או $n\le k-1$ קשתות ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש לו מעגל וזה יהיה מעגל גם ב G. אחרת, לכל $v\in V$ מתקיים $2\le\deg(v)$. נבחר $v_0\in V$ שרירותי ונגדיר סדרה באורך $n+2$ שמתחיל מ v_0 כך: מ v_0 נעבר לשכן שלו שיסומן v_1 מ v_1 נעבור לשכן שלו שאינו v_0 ונסמנו v_2 (אפשרי כי הדרגה גדולה מ 1) כעת נניח שהגדרנו

את המסלול עד ל v_i ונגדיר v_{i+1}להיות שכן של v_iששונה מ v_{i-1}. כיוון שב $|V| = n+1$ במסלול שהגדרנו יש קודקוד שמופיע פעמיים. נסמן את תת המסלול $P = (v_i, \ldots, v_{i+t})$ הקצר ביותר המקיים $v_i = v_{i+t}$. כעת זהו מסלול פשוט כי אחרת נקבל סתירה לכך P קצר ביותר. בנוסף $t \leq 3$ כי אחרת $P = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2})$ אבל הגדרנו את v_{i+2} להיות שכן של v_{i+1} ששונה מ v_i סתירה. משל. ■

הגדרה 9.17 גרף $T = (V, E)$ לא מכוון פשוט יקרא עץ אם הוא קשיר ללא מעגלים.

משפט 9.18 יהא $T = (V, E)$ גרף לא מכוון פשוט מסדר סופי n אזי הבאים שקולים:

1. T עץ
2. T קשיר עם $n-1$ קשתות.
3. T ללא מעגל עם $n-1$ קשתות.

הוכחה:
$(1 \Rightarrow 2)$ T קשיר בגלל שהוא עץ. כעת יש לו לפחות $n-1$ קשתות לפי מסקנה 9.15. בגלל שב T אין מעגל יש בו לכל היותר $n-1$ קשתות לפי משפט 9.16. לכן יש לו בדיוק $n-1$ קשתות.
$(2 \Rightarrow 3)$ נתון T קשיר עם $n-1$ קשתות. צ"ל ב T אין מעגל. נניח בשלילה כי ב T יש מעגל $C = (v_0, \ldots, v_n = v_0)$ אזי עבור $e = \{v_{n-1}, v_n\}$ מתקיים כי $T' = (V, E \setminus \{e\})$ קשיר לפי משפט 9.13 ולכן כיוון ש $|V(T')| = n$ יש לו לפחות $n-1$ קשתות. סתירה לכך ש $|E \setminus \{e\}| = n-2$.
$(3 \Rightarrow 1)$ נתון T ללא מעגל עם $n-1$ קשתות. צ"ל כי T קשיר. נניח בשלילה כי T אינו קשיר אזי קיימים לפחות שני רכיבי קשירות, נסמן את רכיבי הקשירות השונים ב $\{[v_i]\}_{i=1}^{t}$. כיוון שב T אין מעגל גם ב $[v_i]$ לכל i ולכן מספר הצלעות ב $[v_i]$ הוא קטן שווה ל $|[v_i]| - 1$ ולכן

$$n-1 = |E| = \sum_{i=1}^{t} |E([v_i])| \leq \sum_{i=1}^{t} (|[v_i]| - 1) = |V| - t \leq n-2$$

סתירה. משל.

■

הגדרה 9.19 עץ פורש של $G = (V, E)$ גרף לא מכוון פשוט וקשיר הוא עץ $T = (V, E')$ עבור $E' \subseteq E$.

משפט 9.20 יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר עם $|E| = k$ קשתות. הוכיחו כי קיים לו עץ פורש.

הוכחה: באינדוקציה על k: עבור $k = 0$ נקבל כי ב Gבפרט אין מעגלים ולכן $T = G$ עץ ולכן עץ פורש. כעת נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח עבור $k+1$. יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר עם $|E| = k+1$ קשתות. אם קיים $e \in E$ שעבורו $G' = (V, E \setminus \{e\})$ קשיר נקבל לפי הנחת האינדוקציה כי קיים לו עץ פורש $T = (V, E')$ עבור $E' \subseteq E \setminus \{e\}$ ובפרט הוא עץ פורש של G. אם לא קיים $e \in E$ כנ"ל אזי ב G אין מעגל ולכן G עץ ובפרט הוא עץ פורש של עצמו. ■

למה 9.21 יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר ויהא $C=(v_0,\dots,v_n=v_0)$ מעגל ב G ונגדיר $G'=(V,E\backslash E(C))$. אזי לכל $v\in V(G')$ מתקיים כי קיים i כך ש $[v]=[v_i]$

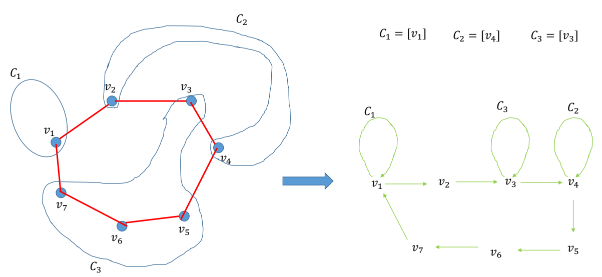
הוכחה: יהא $v\in V(G')$. כיוון ש $v\in V(G')=V(G)$ ו G קשיר קיים מסלול $P=(u_0,\dots,u_r)$ בין v ל v_0. נגדיר $j=\min\{0\le i\le r:\ u_i\in C\}$ אזי $P'=(u_0,\dots,u_j)$ הוא מסלול מ v ל $u_j\in C$ כך שהקשתות של $E(C)$ אינם משתתפות ב P' ולכן $[v]=[u_j]$ ב G'. ■

הגדרה 9.22 יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר. מסלול אוילר של G הוא מסלול $P=(v_0,\dots,v_n)$ שכל הצלעות של G משתתפות בו, כלומר $E=\bigcup_{i=0}^{n-1}\{v_i,v_{i+1}\}$. מעגל אוילר הוא מסלול אוליר כך ש $v_0=v_n$ (כלומר מעגל שמשתתפות בו כל הצלעות).

משפט 9.23 יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר סופי עם $1\le|V|$. אזי קיים מעגל אוילר $\iff$ כל קודקוד מדרגה זוגית.

הוכחה: ($\Leftarrow$) נתון $P=(v_0,\dots,v_n=v_0)$ מעגל אוליר. יהא $v\in V$ הדרגה של v שווה ל $2t$ כאשר t זה מספר הפעמים ש v מופיע ב P כי כל פעם שנכנסים ל v יוצאים ממנו דרך קשת אחרת.

($\Rightarrow$) באינדוקציה על מספר הקשתות k: עבור $k=0$ נקבל כי $V=\{v\}$ ו (v)הוא מסלול אוליר. כעת נניח נכונות עד k (לא כולל) ונוכיח עבור k:יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר סופי עם $1\le|V|$ עם k קשתות. נתון כל קודקוד מדרגה זוגית ולכן כל קודקוד v מתקיים $2\le\deg(v)$ ובפרט $2|V|\le\sum_v\deg(v)=2|E|$ ולכן לפי משפט 9.16 קיים מעגל $C=(v_0,\dots,v_n=v_0)$ ב G (כי $|V|\le|E|$) . לפי למה 9.21 כל רכיב קשירות של $G'=(V,E\backslash E(C))$ ניתן להציגו כ $[v_i]$ כאשר $v_i\in C$ כלשהוא ולכן נוכל להציג את רכיבי הקשירות השונים $\{[v_{i_1}],\dots,[v_{i_t}]\}$. בנוסף, כמו בכיוון ($\Leftarrow$) נקבל כי לכל v_i מתקיים שמספר הקשתות שיוצאות ממנו ומשתתפות ב C הוא זוגי ולכן גם בגרף $G'=(V,E\backslash E(C))$ כל קודקוד מדרגה זוגית (הדרגה של v_i ב G' היא הדרגה של v_i בG שהיא זוגית פחות מספר הקשתות שיוצאות ממנו שמשתתפות ב C שגם זוגי. זוגי פחות זוגי שווה זוגי). לכן נוכל להפעיל את הנחת האינדוקציה על כל רכיב קשירות $[v_{i_j}]$ ולהסיק כי קיים מעגל אוילר C_j. כעת נבנה מעגל אוילר ב G כך: נלך על המעגל C וכשניפגוש v_{i_j}שלא ביקרנו בו ב C_j שלו נעבר על המעגל C_j ונמשיך. למשל



■

מסקנה 9.24 יהא $G=(V,E)$ גרף לא מכוון פשוט קשיר סופי עם $1\le|V|$. אזי קיים מסלול אוילר $\iff$ מספר הקודקודים עם דרגה אי זוגית היא 0 או 2.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ תרגיל לבד.
$(\Rightarrow)$ אם כל הדרגות זוגית אזי קיים מעגל אוליר ובפרט הוא מסלול אוילר. אחרת קיימים v, v' עם דרגות אי זוגיות. נוסיף $x \notin V$ לקבוצת הקודקודים ונוסיף $(x, v'), (x, v')$ לקבוצת הקשתות. בגרף החדש, כל קודקוד מדרגה זוגית ולכן קיים בו מעגל אוילר $C = (x, v_0, \ldots, v_n, x)$ שמתחיל ומסתיים ב x ולכן $\{v_0, v_n\} = \{v, v'\}$ ולכן $(v_0, \ldots, v_n)$ הוא מסלול אולר של G. ■