89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 4

<u>שאלה 1</u>: נניח ש $A \triangle B$ ו C זרות וש $x \in A$. הוכח שאם $x \in C$ אז $x \in B$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

נתונים	מטרה
$(A \triangle B) \cap C = \emptyset$ $x \in A$	$x \in C \Rightarrow x \in B$

בעזרת אסטרטגיה 2, נוסיף את $x \notin B$ להנחות, ונוכיח $x \notin C$.

נתונים	מטרה
$(A \triangle B) \cap C = \emptyset$ $x \in A$ $x \notin B$	$x \notin C$

בעזרת אסטרטגיה 4, נוסיף את $x \in C$ להנחות ונגיע לסתירה.

נתונים	מטרה
$(A \triangle B) \cap C = \emptyset$ $x \in A$ $x \notin B$ $x \in C$	סתירה

מכיון ש $x \in A$ ו $x \notin B$ נקבל ש $x \in A \setminus B$, ולכן $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$.

כעת $x \in C$ וגם $x \in A \triangle B$, לכן $x \in (A \triangle B) \cap C$, וזו סתירה להנחה ש $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש $x \in C$ ונניח בשלילה ש $x \notin B$.

מכיון ש $x \in A$ ו $x \notin B$ נקבל ש $x \in A \setminus B$ ולכן $x \in A \triangle B$.

כעת $x \in C$ וגם $x \in A \triangle B$, לכן $x \in (A \triangle B) \cap C$, וזו סתירה להנחה ש $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$.

לכן אם $x \in C$ אז $x \in B$.

<u>שאלה 2</u>: יהיו a, b מספרים ממשיים ו $a \neq 0$. הוכח שקיים מספר ממשי יחיד x המקיים $ax + b = 0$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

נתונים	מטרה
$a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$	$\exists!\, x: ax + b = 0$

לפי אסטרטגיה 20 נוכיח בנפרד קיום ויחידות.

1) קיום:

נתונים	מטרה
$a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$	$\exists x: ax + b = 0$

נשתמש באסטרטגיה 9. נפתור את המשוואה $ax + b = 0$, כלומר $ax = -b$.

מכיון ש $a \neq 0$, ניתן לחלק ב a ונקבל $x = -\frac{b}{a}$.

2) יחידות:

נתונים	מטרה
$a, b \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$	$\forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R}\big((ay + b = 0 \wedge az + b = 0) \Rightarrow y = z\big)$

בעזרת אסטרטגיה 8 נניח ש y, z אברים שרירותיים ב $\mathbb{R}$.

נתונים	מטרה
$a, b, y, z \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$	$(ay + b = 0 \wedge az + b = 0) \Rightarrow y = z$

בעזרת אסטרטגיה 1 נניח ש $ay + b = 0 \wedge az + b = 0$ ונוכיח $y = z$.

נתונים	מטרה
$a, b, y, z \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ $ay + b = 0 \wedge az + b = 0$	$y = z$

בעזרת אסטרטגיה 13 נתיחס ל $ay + b = 0 \wedge az + b = 0$ כאל שני נתונים נפרדים.

מכיון ש $a \neq 0$ נקבל ש

$$ay + b = az + b \Rightarrow ay = az \Rightarrow y = z$$

<u>הוכחה</u>:

נוכיח בנפרד קיום ויחידות.

<u>קיום</u>: מכיון ש $a \neq 0$, ניתן להגדיר $x = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$, ואכן מתקיים

$$ax + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$$

<u>יחידות</u>: יהיו $y, z \in \mathbb{R}$ שרירותיים המקיימים $ay + b = 0$ ו $az + b = 0$. נוכיח ש $y = z$.

ואכן מכיון ש $ay + b = az + b$ נובע ש $ay = az$, ומכיון ש $a \neq 0$ נקבל ש $y = z$.

<u>שאלה 3</u>: יהיו a, b, c מספרים שלמים. הוכח שאם $a \nmid bc$ אזי $a \nmid b$.

<u>רעיון ההוכחה</u>:

אנו רוצים להוכיח $\forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z}(a \nmid bc \Rightarrow a \nmid b)$.

בעזרת אסטרטגיה 8, נניח ש $a, b, c \in \mathbb{Z}$ אברים שרירותים.

נתונים	מטרה
$a, b, c \in \mathbb{Z}$	$a \nmid bc \Rightarrow a \nmid b$

בעזרת אסטרטגיה 2 נניח ש $a \mid b$ ונוכיח ש $a \mid bc$.

נתונים	מטרה
$a, b, c \in \mathbb{Z}$ $a \mid b$	$a \mid bc$

מכיון ש $a \mid b$ קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $b = ak$, לכן $bc = akc$.

מכיון ש $kc \in \mathbb{Z}$ נובע ש $a \mid bc$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש $a \mid b$ ונוכיח ש $a \mid bc$.

מכיון ש $a \mid b$ קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $b = ak$, נכפול את שני האגפים ב c ונקבל $bc = akc$.

מכיון ש $kc \in \mathbb{Z}$ נובע ש $a \mid bc$.

<u>שאלה 4</u>: יהי a מספר שלם. הוכח ש $3 \nmid a$ אם ורק אם $3 \mid (a^2-1)$

<u>רעיון ההוכחה:</u>

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$	$3 \nmid a \Leftrightarrow 3 \mid (a^2-1)$

בעזרת אסטרטגיה 14 נוכיח את הטענות בנפרד.

1) נתחיל עם "רק אם"

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$	$3 \nmid a \Rightarrow 3 \mid (a^2-1)$

בעזרת אסטרטגיה 1, נניח $3 \nmid a$ ונוכיח $3 \mid (a^2-1)$.

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$ $3 \nmid a$	$3 \mid (a^2-1)$

המשמעות שלכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $a \neq 3k$ היא שקיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $a = 3k+1$ או $a = 3k+2$.

לכן, לפי אסטרטגיה 6, נשכתב את הנתון.

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$ $\exists k \in \mathbb{Z}(a = 3k+1 \vee a = 3k+2)$	$3 \mid (a^2-1)$

בעזרת אסטרטגיה 10, נגדיר משתנה $k_0 \in \mathbb{Z}$ עבורו מתקיים $a = 3k_0+1 \vee a = 3k_0+2$.

נתונים	מטרה
$a, k_0 \in \mathbb{Z}$ $a = 3k_0+1 \vee a = 3k_0+2$	$3 \mid (a^2-1)$

כעת, לפי אסטרטגיה 17, נפרק לשני מקרים.

מקרה 1: $a = 3k_0+1$ ואז מתקיים $a^2-1 = (3k_0+1)^2-1 = 9k_0^2+3k_0+1-1 = 3(3k_0^2+k_0)$

מקרה 2: $a = 3k_0+2$ ואז מתקיים $a^2-1 = (3k_0+2)^2-1 = 9k_0^2+6k_0+4-1 = 3(3k_0^2+3k_0+1)$

2) נמשיך עם " אם"

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$	$3 \mid (a^2-1) \Rightarrow 3 \nmid a$

בעזרת אסטרטגיה 1, נניח $3 \mid (a^2-1)$ ונוכיח $3 \nmid a$.

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$ $3 \mid (a^2-1)$	$3 \nmid a$

בעזרת אסטרטגיה 4, נניח ש $3 \mid a$ ונגיע לסתירה.

נתונים	מטרה
$a \in \mathbb{Z}$ $3 \mid (a^2-1)$ $3 \mid a$	סתירה

$3 \mid a$ ולכן קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $a = 3k$, כלומר $a^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$ ונקבל ש $3 \mid a^2$.

זו סתירה להנחה ש $3 \mid (a^2-1)$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח ש $3 \nmid a \Leftrightarrow 3 \mid (a^2-1)$.
($\Rightarrow$) נניח ש $3 \nmid a$ ונוכיח $3 \mid (a^2-1)$.
מכיון ש $3 \nmid a$, קיים $k_0 \in \mathbb{Z}$ המקיים $a = 3k_0 + 1$ או $a = 3k_0 + 2$.

- מקרה 1, $a = 3k_0 + 1$: במקרה זה מתקיים

$$a^2 - 1 = (3\mathrm{k}_0 + 1)^2 - 1 = 9k_0^2 + 3k_0 + 1 - 1 = 3(3k_0^2 + k_0)$$

מכיון ש $k_0 \in \mathbb{Z}$ גם $3k_0^2 + k_0 \in \mathbb{Z}$, ולכן $3 \mid (a^2-1)$.

- מקרה 2, $a = 3k_0 + 2$: במקרה זה מתקיים

$$a^2 - 1 = (3\mathrm{k}_0 + 2)^2 - 1 = 9k_0^2 + 6k_0 + 4 - 1 = 3(3k_0^2 + 3k_0 + 1)$$

מכיון ש $k_0 \in \mathbb{Z}$ גם $3k_0^2 + 3k_0 + 1 \in \mathbb{Z}$, ולכן $3 \mid (a^2-1)$.

ולכן, אם $3 \nmid a$ אז $3 \mid (a^2-1)$.
($\Leftarrow$) נניח ש $3 \mid (a^2-1)$ ונוכיח $3 \nmid a$. נניח בשלילה ש $3 \mid a$.
מכיון ש $3 \mid a$, קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $a = 3k$, כלומר $a^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$. בנוסף $3k^2 \in \mathbb{Z}$ ולכן $3 \mid a^2$.
זו סתירה להנחה ש $3 \mid (a^2-1)$.
ולכן, אם $3 \mid (a^2-1)$ אז $3 \nmid a$.

<u>שאלה 5</u>: תהיינה A, B קבוצות. הוכח ש $P(A \setminus B) \subseteq \big(P(A) \setminus P(B)\big) \cup \{\emptyset\}$.
<u>הוכחה</u>:
תהי X קבוצה שרירותית ונניח ש $X \in P(A \setminus B)$, כלומר $X \subseteq A \setminus B$.
אם $X = \emptyset$ אזי $X \in \{\emptyset\}$ ולכן $X \in \big(P(A) \setminus P(B)\big) \cup \{\emptyset\}$.
אחרת, יהי $x \in X$ שרירותי.
מכיון ש $X \subseteq A \setminus B$ נובע ש $x \in A \setminus B$, כלומר $x \in A \wedge x \notin B$.
נובע מכך, ש $X \subseteq A$ ובנוסף $X \cap B = \emptyset$.
מכיון ש $X \subseteq A$, נובע ש $X \in P(A)$, ומכיון ש $X \cap B = \emptyset$ ובנוסף $X \neq \emptyset$ נובע ש $X \notin P(B)$.
קיבלנו ש $X \in P(A) \setminus P(B)$, ולכן $X \in \big(P(A) \setminus P(B)\big) \cup \{\emptyset\}$.
ולסיכום, $P(A \setminus B) \subseteq \big(P(A) \setminus P(B)\big) \cup \{\emptyset\}$.

<u>שאלה 6</u>: תהי $\{A_i\}_{i \in I}$ משפחה של קבוצות ונניח ש $I \neq \emptyset$. תהי B קבוצה.
הוכח ש $B \setminus (\cap_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.
<u>הוכחה</u>:
נוכיח שלכל x מתקיים $x \in B \setminus (\cap_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \in \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.
יהי x אבר שרירותי.
($\Leftarrow$) נניח $x \in \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$ ונוכיח $x \in B \setminus (\cap_{i \in I} A_i)$.
מכיון ש $x \in \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$ ו $I \neq \emptyset$, קיים $i_0 \in I$ עבורו מתקיים $x \in B \setminus A_{i_0}$, כלומר $x \in B \wedge x \notin A_{i_0}$.
מצד אחד נקבל ש $x \in B$, מצד שני נקבל שקיים $i \in I$ כך ש $x \notin A_i$, ולכן $x \notin \cap_{i \in I} A_i$.
ביחד נקבל ש $x \in B \setminus (\cap_{i \in I} A_i)$.
($\Rightarrow$) נניח $x \in B \setminus (\cap_{i \in I} A_i)$ ונוכיח $x \in \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.
מכיון ש $x \in B \setminus (\cap_{i \in I} A_i)$ מתקיים ש $x \in B$ ובנוסף $x \notin \cap_{i \in I} A_i$.
מכיון ש $I \neq \emptyset$ נובע שקיים $i_0 \in I$ כך ש $x \notin A_{i_0}$.
נקבל שקיים $i_0 \in I$ עבורו מתקיים $x \in B \setminus A_{i_0}$, ולכן $x \in \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.

<u>שאלה 7</u>: תהי B קבוצה ותהי $\mathcal{F}$ משפחה של קבוצות. הוכח שאם $\mathcal{F} \subseteq P(B)$ אז $\cup \mathcal{F} \subseteq B$.
<u>הוכחה</u>:
נניח ש $\mathcal{F} \subseteq P(B)$.
יהי x אבר שרירותי, ונניח ש $x \in \cup \mathcal{F}$.
אזי קיימת קבוצה $A \in \mathcal{F}$ עבורה מתקיים $x \in A$.
מכיון ש $\mathcal{F} \subseteq P(B)$ ו $A \in \mathcal{F}$ נובע ש $A \in P(B)$, כלומר $A \subseteq B$.
כעת $x \in A$ ו $A \subseteq B$ ולכן $x \in B$, וקיבלנו ש $\cup \mathcal{F} \subseteq B$.
לסיכום, אם $\mathcal{F} \subseteq P(B)$ אז $\cup \mathcal{F} \subseteq B$.

<u>שאלה 8</u>: תהיינה $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ משפחות לא ריקות של קבוצות. הוכח ש $\cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$.
<u>הוכחה</u>:
נוכיח שלכל x מתקיים $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \Leftrightarrow x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$.
יהי x אבר שרירותי.
$(\Leftarrow)$ נניח $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$ ונוכיח $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.
מכיון ש $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$ נבדוק שני מקרים:

- מקרה 1, $x \in \cup \mathcal{F}$: אזי קיימת $A_0 \in \mathcal{F}$ עבורה מתקיים $x \in A_0$.
  מכיון ש $A_0 \in \mathcal{F}$ נובע ש $A_0 \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, ולכן $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.
- מקרה 2, $x \in \cup \mathcal{G}$: אזי קיימת $A_0 \in \mathcal{G}$ עבורה מתקיים $x \in A_0$.
  מכיון ש $A_0 \in \mathcal{G}$ נובע ש $A_0 \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, ולכן $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

ונקבל שאם $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$ אז $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.
$(\Rightarrow)$ נניח $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ ונוכיח $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$.
מכיון ש $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ קיימת $A_0 \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ עבורה מתקיים $x \in A_0$.
מכיון ש $A_0 \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ נובע ש $A_0 \in \mathcal{F}$ או $A_0 \in \mathcal{G}$. נבדוק את שני המקרים:

- מקרה 1, $A_0 \in \mathcal{F}$: מכיון ש $x \in A_0$ ו $A_0 \in \mathcal{F}$, נובע ש $x \in \cup \mathcal{F}$, ולכן $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$.
- מקרה 2, $A_0 \in \mathcal{G}$: מכיון ש $x \in A_0$ ו $A_0 \in \mathcal{G}$, נובע ש $x \in \cup \mathcal{G}$, ולכן $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$.

ונקבל שאם $x \in \cup (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ אז $x \in (\cup \mathcal{F}) \cup (\cup \mathcal{G})$.

<u>שאלה 9</u>: תהי A קבוצה. הוכח שקיימת קבוצה יחידה X כך שמתקיים $A \triangle X = A$.
<u>הוכחה</u>:
נוכיח בנפרד קיום ויחידות:
<u>קיום</u>: עבור $A = \emptyset$ מתקיים $A \triangle \emptyset = A$.
<u>יחידות</u>: תהיינה X_1, X_2 קבוצות עבורן מתקיים $A \triangle X_1 = A$ ובנוסף $A \triangle X_2 = A$. נוכיח ש $X_1 = X_2$.
יהי x שרירותי.
$(\subseteq)$ נניח ש $x \in X_1$.

- מקרה 1: אם $x \in A$, אזי $x \in A \cap X_1$ ולכן $x \notin A \triangle X_1$.
  מכיון ש $A \triangle X_1 = A = A \triangle X_2$ נובע ש $x \notin A \triangle X_2$.
  מכיון ש $x \in A$ אך $x \notin A \triangle X_2$ נובע ש $x \in A \cap X_2$, ולכן $x \in X_2$.
- מקרה 2: אם $x \notin A$, אזי $x \in A \cup X_1$ ובנוסף $x \notin A \cap X_1$, ולכן $x \in A \triangle X_1$.
  מכיון ש $A \triangle X_1 = A = A \triangle X_2$ נובע ש $x \in A \triangle X_2$.
  לכן $x \in A \cup X_2$, ומכיון ש $x \notin A$ נובע ש $x \in X_2$.

ונקבל ש $X_1 \subseteq X_2$.

($\supseteq$) נניח ש $x \in X_2$.

- מקרה 1: אם $x \in A$, אזי $x \in A \cap X_2$ ולכן $x \notin A \triangle X_2$.
  מכיון ש $A \triangle X_2 = A = A \triangle X_1$ נובע ש $x \notin A \triangle X_1$.
  מכיון ש $x \in A$ אך $x \notin A \triangle X_1$ נובע ש $x \in A \cap X_1$, ולכן $x \in X_1$.
- מקרה 2: אם $x \notin A$, אזי $x \in A \cup X_2$ ובנוסף $x \notin A \cap X_2$, ולכן $x \in A \triangle X_2$.
  מכיון ש $A \triangle X_2 = A = A \triangle X_1$ נובע ש $x \in A \triangle X_1$.
  לכן $x \in A \cup X_1$, ומכיון ש $x \notin A$ נובע ש $x \in X_1$.

ונקבל ש $X_2 \subseteq X_1$.

ביחד נקבל ש $X_1 = X_2$.

<u>**שאלה 10**</u>: תהי A קבוצה כך שלכל משפחה של קבוצות $\mathcal{F}$ אם $\cup \mathcal{F} = A$ אזי $A \in \mathcal{F}$.
הוכח שב A יש אבר אחד בלבד.

<u>הוכחה</u>:
נוכיח בנפרד קיום ויחידות.
<u>קיום</u>:
נוכיח שקיים אבר ב A.
נניח בשלילה ש $A = \emptyset$.
עבור $\mathcal{F} = \emptyset$ (משפחה ריקה של קבוצות) מתקיים $\cup \mathcal{F} = \emptyset = A$ אולם $A \notin \mathcal{F}$, וזו סתירה להנחה.
לכן $A \neq \emptyset$.
<u>יחידות</u>:
יהיו a, b שרירותיים.
נניח ש $a \in A$ וגם $b \in A$ ונוכיח ש $a = b$. נניח בשלילה ש $a \neq b$.
נסמן $B = A \setminus \{a, b\}$.
עבור $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, B\}$ מתקיים $\cup \mathcal{F} = \{a\} \cup \{b\} \cup B = A$ אולם $A \notin \mathcal{F}$, וזו סתירה להנחה.
לכן אם $a \in A$ וגם $b \in A$ אזי $a = b$.